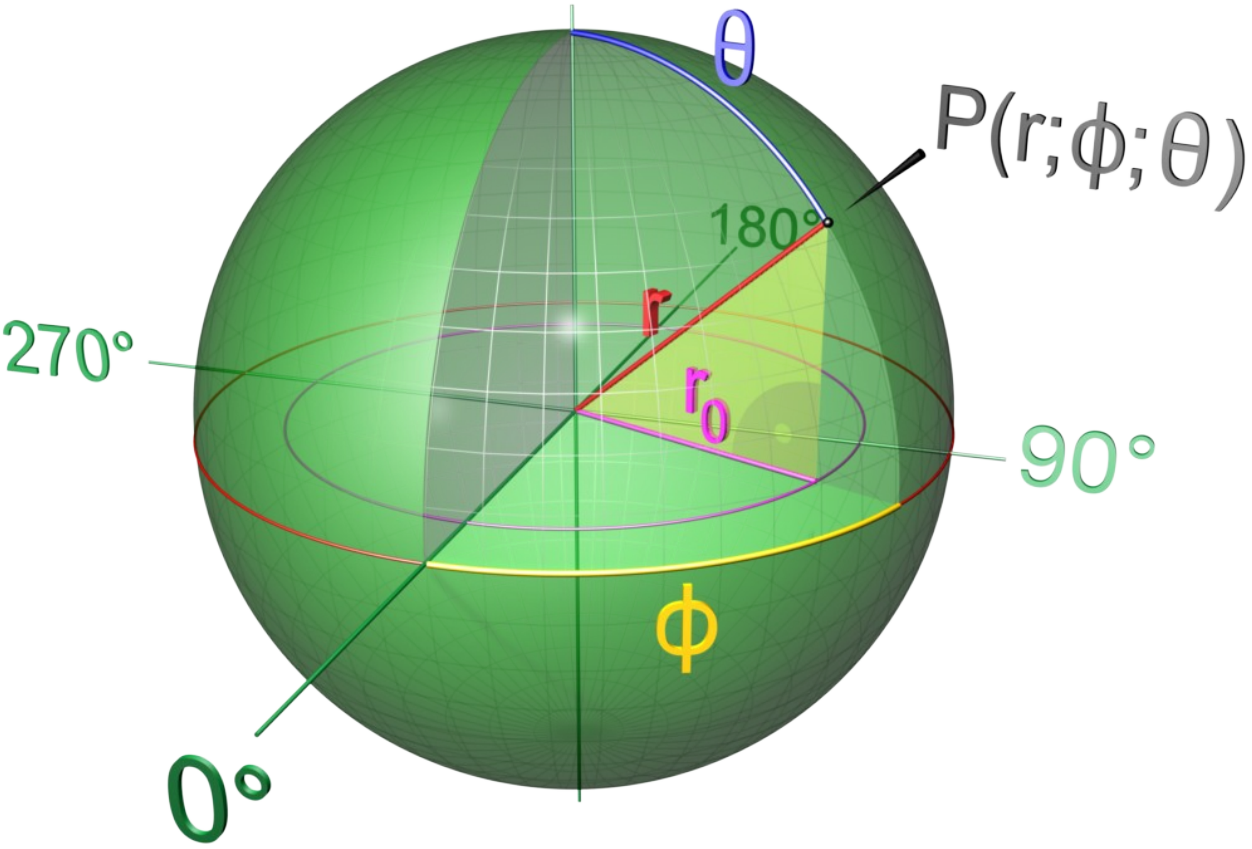
MATEMATICA
II LICEO



WIKIPEDIA
L'enciclopedia libera

BY SA

NOTE GENERALI SUL PROGETTO “LIBRI DI TESTO”

Questo è un progetto che avevo in mente di attuare da tempo: provare ad usare il materiale presente su Wikipedia e progetti correlati per creare dei libri di testo liberi per le scuole; tuttavia, a seguito di una discussione che ho intrapreso con altri utenti nel bar di Wikipedia è emerso che a quanto ho capito non esiste più un vero e proprio "programma ministeriale" per le scuole superiori. Ho capito inoltre che oggigiorno ogni scuola va abbastanza per conto suo nella definizione dei programmi di corso, motivo per cui è praticamente impossibile creare dei testi "standard" validi ovunque (e ci sarebbe da chiedersi perchè questa grande "libertà" è spesso correlata ai testi iperspecifici per ogni classe che i docenti adottano per i loro corsi... testi di cui spesso sono anche autori! :D). A questo problema si aggiunge il già citato iperspecialismo di volte voci che in molti casi può dare problemi ed il fatto che i testi sono spesso strutturati da un punto di vista più "didattico".
Ad ogni modo ho deciso comunque di proseguire il progetto per una serie di ragioni che illustro qui sotto, creando solo i testi del Liceo Classico da utilizzare come esempio pratico:

•fornire dei testi utilizzabili in quei contesti ove i testi "ufficiali" siano troppo costosi (es. terzo mondo)
•dimostrare la fattibilità del progetto a grandi linee
•fornire una critica all'attuale sistema di creazione dei programmi di corso e dei libri di testo scolastici. Davvero la "libertà editoriale" come è propagandata oggi tutela gli studenti e le famiglie? (Non dico che bisogna tornare al "testo unico" del ventennio, ma sarebbe interessante quantomeno studiare i conflitti di interesse nella creazione e nell'utilizzo dei testi)
•mostrare come la "massa" possa autogestire la creazione dei testi scolastici indipendentemente dagli editori e fornendo testi di qualità e gratuiti, oltre che più aderenti ad un punto di vista neutrale.
Per vari testi liberi relativi alla Letteratura Italiana, antica e straniera per tutti gli anni del corso si rimanda al progetto WikiSource o ad archive.org.

Galati Antonello

WIKIPEDIA

Progressione aritmetica

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica una **progressione aritmetica** è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun *termine* (o *elemento*) della successione e il suo precedente sia una costante. Tale costante viene detta *ragione* della progressione. Per esempio, la successione 3, 5, 7, 9, 11, ... è una progressione aritmetica di ragione 2.

Indice

Calcolo
- Esempio: somma dei primi *n* interi positivi

Dimostrazione

Caratteristiche

Voci correlate

Collegamenti esterni

Calcolo

Se il primo termine di una progressione aritmetica è a_1 e la ragione è d, allora l'n-esimo termine della successione è dato da:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Tale proprietà può essere estesa a un qualsiasi termine della progressione; si avrà quindi che:

$$a_r = a_s + (r-s)d$$

La somma dei numeri di una progressione aritmetica finita si chiama **serie aritmetica**. La somma S dei primi n valori di una progressione aritmetica è uguale a:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n),$$

dove a_1 è il primo termine e a_n l'n-esimo.

Esempio: somma dei primi *n* interi positivi

Per esempio per trovare la somma dei primi n interi positivi $\sum_{k=1}^{n} k$, si calcola:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione

Si deve dimostrare che $\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Posizioniamo due progressioni aritmetiche uguali a quella data una sopra l'altra e con gli addendi invertiti di posizione. Ponendo S uguale alla somma e andando poi a sommare in verticali gli addendi corrispondenti, abbiamo che:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \\ \hline 2S &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) \end{aligned}$$

La riga inferiore presenta addendi uguali perché $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_1 + a_n$. Ciò è facilmente dimostrabile. Infatti, ricordando che l'n-esimo termine è dato da $a_1 + (n-1)d$, effettuando le seguenti sostituzioni:

- $a_2 = a_1 + d$
- $a_{n-1} = a_n - d$

e scrivendo

$$a_1 + a_n = (a_1 + d) + (a_n - d),$$

si dimostra che

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}.$$

Simili uguaglianze sono dimostrabili per gli altri termini della somma. Ma allora, ricordando che la somma della riga inferiore contiene n termini

$$2S = n(a_1 + a_n)$$

dividendo entrambi i membri dell'equazione per 2

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Caratteristiche

Le progressioni aritmetiche forniscono le **sequenze di intervalli consecutivi di uguale ampiezza** (la ragione); queste sequenze servono per la definizione degli integrali e per le campionature delle funzioni reali di una variabile reale; queste ultime sono utilizzate per la presentazione grafica di queste funzioni in tutti gli odierni sistemi e pacchetti computazionali.

Il teorema di Dirichlet, dimostrato nel 1837 da Peter Gustav Lejeune Dirichlet, afferma che in ogni progressione aritmetica in cui il primo termine a e la ragione d siano interi coprimi (ossia valga MCD $(a, d) = 1$) si trovano infiniti numeri primi.

Voci correlate

- Addizione
- Progressione geometrica
- Polinomi calcolanti somme di potenze di progressioni aritmetiche

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Progressione aritmetica*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- *Arithmetic series - da Mathworld*, su *mathworld.wolfram.com*.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38077 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38077) · LCCN (EN) sh85120238 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85120238) · J9U (EN, HE) 987007531747705171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007531747705171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Progressione_aritmetica&oldid=130590293"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 20 nov 2022 alle 23:36.

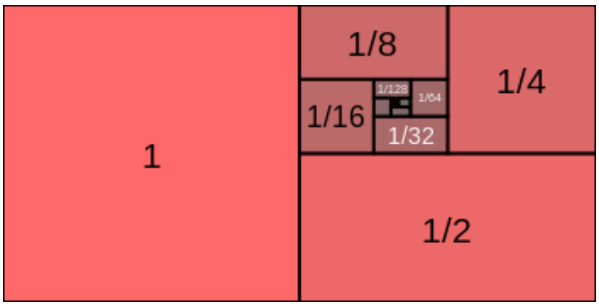
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Progressione geometrica

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

In matematica, una **progressione geometrica** o **successione geometrica** (detta talvolta, impropriamente, anche **serie geometrica**, vedi sotto) è una successione di numeri tali che il rapporto tra un elemento ed il suo precedente sia sempre costante. Tale costante è detta *ragione* della successione.



La somma della progressione geometrica di ragione 1/2 (pari a 2), può essere illustrata graficamente come somma di aree

In generale sarà

$$a_2 = a_1 r; a_3 = a_2 r = a_1 r^2; \ldots; a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$$

dove $r \neq 0$ è la ragione e a_1 è il primo termine della successione.

Indice

- Formule
- Esempi
- Applicazioni
- Serie geometrica
- Voci correlate
- Collegamenti esterni

Formule

Le progressioni geometriche hanno il vantaggio di fornire alcune semplici formule per il calcolo dei termini che le compongono.

Il termine *n*-esimo può essere infatti definito come

$$a_n = a_1 \, r^{n-1}$$

dove a_1 è il primo termine della successione.

La ragione è di conseguenza

$$r = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{1/(n-1)} \quad \text{per } n > 1$$

e il primo termine della successione vale

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}.$$

Esempi

Una successione di ragione 2 e fattore di scala 1 è

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Una successione di ragione 2/3 e fattore di scala 729 è

729 (1, 2/3, 4/9, 8/27, 16/81, 32/243, 64/729, ...) = 729, 486, 324, 216, 144, 96, 64, ...

Una successione di ragione −1 e fattore di scala 3 è

3 (1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...) = 3, −3, 3, −3, 3, −3, 3, −3, 3, −3, ...

Una progressione geometrica non nulla mostra una crescita esponenziale o un decadimento esponenziale. In particolare se

- $r = 1$, il risultato è costante e vale *a*,
- $r = -1$, il risultato oscilla tra *a* e *-a*,
- $r > 1$, si ha una crescita esponenziale verso infinito (positivo),
- $r < -1$, si ha una crescita esponenziale verso infinito (con un'oscillazione tra valori positivi e negativi).
- $-1 < r < 1$, si ha un decadimento esponenziale verso zero.
- $r = 0$, il risultato è zero.

Si confrontino questi risultati con quelli di una progressione aritmetica, la quale mostra una crescita (o una diminuzione) lineare (es. 4, 15, 26, 37, 48, ...). Si noti che i due tipi di progressione sono strettamente connessi: applicando il logaritmo ai termini di una progressione geometrica si ottiene una progressione aritmetica.

Applicazioni

Si osserva facilmente che una progressione geometrica soddisfa la seguente condizione

$$a_n = r\,a_{n-1}.$$

interpretabile come una equazione alle differenze finite, di cui una progressione di rapporto comune *r* è soluzione.

L'equazione precedente si ritrova in molti modelli di crescita esponenziale. Ad esempio, il numero di individui in una colonia di batteri che si duplicano ad intervalli di tempo costanti segue una progressione geometrica di ragione 2.

Serie geometrica

Il termine **serie geometrica** è riservato alla somma di *infiniti* termini di una progressione geometrica (con *fattore di scala* unitario)

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots$$

mentre la scrittura sottostante è detta *somma parziale* dei primi *n* termini della serie o *ridotta n-esima* della serie:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

La formula chiusa che esprime la somma della ridotta n-esima di una serie geometrica di ragione *r* può essere ottenuta nel seguente modo: si moltiplica l'espressione per il fattore (1-*r*) ottenendo

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1(1-r) + r(1-r) + r^2(1-r) + \dots + r^n(1-r) = 1 - r + r - r^2 + r^2 - r^3 + \dots + r^n - r^{n+1}$$

poiché tutti i termini del membro a destra dell'equazione, ad eccezione di 1 e r^{n+1}, si annullano fra loro, posto $r \neq 1$, si può dividere per (1-*r*), ottenendo

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Quindi, nel caso in cui $|r| < 1$, per $n \to \infty$ si ha $r^n \to 0$, pertanto per una *serie geometrica* (*convergente*) si può scrivere

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

Voci correlate

- Progressione aritmetica
- Serie geometrica

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Progressione geometrica*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Progressione geometrica*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Progressione_geometrica&oldid=129876100"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'11 ott 2022 alle 18:29.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Equazione esponenziale

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Una **equazione esponenziale** è una equazione in cui l'incognita si trova come esponente di una qualsiasi base: è una equazione esponenziale ad esempio $a^{x+8} = x + 2$, ma non $x^a + e^3 = 3$.

Spiegazione

Per risolvere una equazione esponenziale, bisogna cercare di ricondurla a una forma ridotta del tipo $a^x = b$. In seguito si cerca di riportare b in dipendenza da a, portandosi a una forma del tipo $a^x = a^c$, ossia di ridurre tutti i termini dell'equazione a potenze con la stessa base. A questo punto si può passare agli argomenti e risolvere l'equazione per $x = c$. Se non si può esprimere b come potenza di a, si deve ricorrere alla teoria dei logaritmi: $a^x = b$ se e solo se $x = \log_a b$.

Per calcolare più facilmente le soluzioni di un'equazione esponenziale, ci si può affidare anche al grafico della funzione esponenziale. Questo procedimento si rende necessario quando l'incognita compaia sia come esponente sia come base; in questo caso, infatti, l'equazione è trascendente, e non può essere risolta se non in casi particolari. Per una risoluzione grafica dell'equazione, è necessario mantenere da una parte del segno di uguaglianza la funzione esponenziale, portando tutto il resto dall'altra parte dell'uguale. A questo punto si disegna sul grafico la funzione esponenziale e la funzione rappresentata da tutto ciò che sta al di là del segno di uguale: si verifica poi il valore o l'insieme di valori per cui l'equazione è soddisfatta. Le soluzioni sono infatti rappresentate, sul grafico, dall'ascissa delle intersezioni tra i grafici delle funzioni.

La funzione esponenziale per una base strettamente maggiore di 1.

Esempio: $e^x + x - 1 = 0$.

Si riporta nella forma $e^x = -x + 1$. Si disegna sul grafico la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ (grafico a fianco) e la retta $g(x) = -x + 1$. Si verifica facilmente che le due funzioni si incontrano in un solo punto, $P(0, 1)$. La soluzione dell'equazione è pertanto $x = 0$.

Esempi di risoluzione

Questo semplice esempio pratico permette di capire meglio come è possibile risolvere un'equazione esponenziale:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{6-x} = 5 \Rightarrow \left(5^{-1}\right)^{6-x} = 5 \Rightarrow -6 + x = 1 \Rightarrow x = 7$$

Per prima cosa eleviamo alla -1 la frazione in modo da avere tutte le basi uguali, cioè 5, poi utilizzando le proprietà delle potenze moltiplichiamo per -1 gli esponenti in modo da poterli isolare dalle basi, che cancelliamo.

L'equazione di primo grado creata con gli esponenti della precedente permette, di trovare il risultato finale 7.

Ecco un altro esempio:

$$3^{5x+1} = \frac{1}{\sqrt[5]{9}} \Rightarrow 3^{5x+1} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \Rightarrow 3^{5x+1} = \frac{1}{3^{\frac{2}{5}}} \Rightarrow 3^{5x+1} = 3^{-\frac{2}{5}} \Rightarrow 5x+1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{7}{25}$$

Stavolta sono state utilizzate le proprietà dei radicali e delle potenze, oltre all'artificio $9 = 3^2$.

Voci correlate

- Equazione
- Equazione trascendente
- Equazione logaritmica
- Funzione esponenziale

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 32482 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=32482)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_esponenziale&oldid=111736937"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 26 mar 2020 alle 18:42.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Equazione logaritmica

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Un'**equazione logaritmica** è un'equazione in cui l'incognita compare come argomento o come base di un logaritmo[1], come ad esempio $log_2(x+3)=7$. È un'equazione trascendente, in quanto non riconducibile a somme o prodotti di polinomi. **Non** è un'equazione logaritmica una equazione del tipo $x^3+4x+log_3 7=0$, perché l'incognita non compare né come argomento, né come base del logaritmo.

Indice

Risoluzione di un'equazione logaritmica

Note

Bibliografia

Voci correlate

Risoluzione di un'equazione logaritmica

Per la risoluzione di un'equazione logaritmica ci si affida di solito alla definizione di logaritmo: il logaritmo in base a di argomento b (e si scrive $log_a b$) è l'esponente da assegnare alla base per ottenere l'argomento: se $log_a b = x \rightarrow a^x = b$.[2]

Pertanto, se si ha un'equazione logaritmica da risolvere, prima si cerca di portarla nella forma più ridotta possibile, con a sinistra del segno di uguale il logaritmo e a destra il termine noto; poi, se l'incognita è nell'argomento del logaritmo, si dà a x il valore dell'esponente che occorre assegnare alla base per ottenere il termine noto. Dopo aver risolto l'equazione è necessario verificare se le soluzioni trovate soddisfino o meno le condizioni di esistenza dell'equazione data. Infatti:

- l'argomento di un logaritmo deve essere sempre strettamente positivo
- la base di un logaritmo deve sempre essere strettamente positiva e diversa da 1.[3]

Esempio 1: $log_2(x+5)=3$.

3 è l'esponente da dare a 2 per ottenere $x+5$, quindi $x+5=2^3 \rightarrow x+5=8 \rightarrow x=3$. Tale soluzione è accettabile poiché il campo di esistenza dell'equazione impone la stretta positività dell'argomento: $x+5>0 \rightarrow x>-5$, pertanto la soluzione $x=3$ rientra nell'intervallo desiderato.

Esempio 2: $log_x 32=5$.

5 è l'esponente da dare a x per ottenere 32, da cui $x^5 = 32 \rightarrow x^5 = 2^5 \rightarrow x = 2$. Tale soluzione è compatibile con la condizione di esistenza della base, $x > 0,\ x \neq 1$.

Note

1. ^ Marina Scovenna, *Appunti di geometria analitica e complementi di algebra - Ambito professionale*, CEDAM, 2002, ISBN 88-13-23856-8.p.277
2. ^ Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.Math Blu-Volume 4*, Ghisetti e Corvi, 2012, ISBN 978-88-538-0432-7.p.82
3. ^ Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Ghisetti e Corvi, 1995, ISBN 88-80-13173-7.p.389

Bibliografia

- Marina Scovenna, *Appunti di geometria analitica e complementi di algebra - Ambito professionale*, CEDAM, 2002, ISBN 88-13-23856-8.
- Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Ghisetti e Corvi, 1995, ISBN 88-80-13173-7.

Voci correlate

- Logaritmo
- Equazione
- Equazione esponenziale

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Equazione_logaritmica&oldid=131013892"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 16 dic 2022 alle 16:04.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Costruzione di Specht

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La **rettificazione approssimata della circonferenza**, o **costruzione di Specht**, è un metodo geometrico che consente di ottenere la lunghezza approssimativa di una circonferenza con un dato raggio. Con essa si può ottenere una buona approssimazione del valore di pi greco.

Il metodo fu sviluppato nel 1828 dal matematico tedesco C.G. Specht di Berlino.

Procedimento

Dalla circonferenza di centro O si fa partire la tangente in A. Su di essa si staccano i segmenti AB = 2r, BC = 1/5r, CD = 2/5r.

Si congiunge O con C e D e si porta, a partire da A, sulla retta AO il segmento AE = OC.

La parallela condotta da E alla OD interseca la retta AC in F; il segmento AF è la rettificazione approssimata della circonferenza.

La costruzione di Specht equivale ad assumere per π il valore di 13 x ((√ 146) / 50), cioè 3,14159195 ..., con un errore per difetto minore di 2 milionesimi del raggio.

Collegamenti esterni

- *Costruzioni Cabri*, su *xoomer.virgilio.it*.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Costruzione_di_Specht&oldid=118517105"

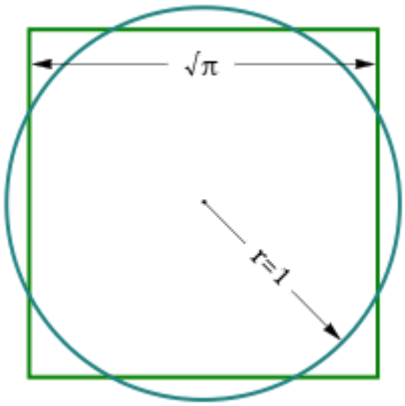
Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'8 feb 2021 alle 11:47.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Quadratura del cerchio

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La **quadratura del cerchio**, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, è un problema classico della matematica greca (più precisamente della geometria), il cui scopo è costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso.

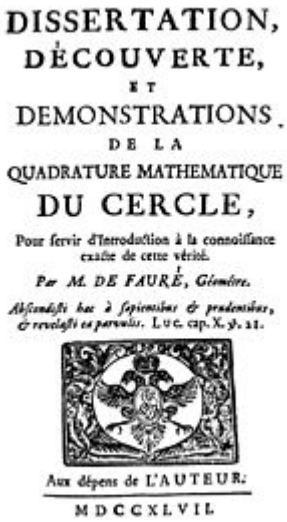


Un cerchio e la sua "quadratura": le figure hanno uguale area

Indice

Storia e descrizione del problema
La "quadratura del cerchio" come metafora
Significato della quadratura del cerchio
Note
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Storia e descrizione del problema


DISSERTATION,
DÉCOUVERTE,
ET
DEMONSTRATIONS,
DE LA
QUADRATURE MATHEMATIQUE
DU CERCLE,
Pour servir d'Introduction à la connoissance exacte de cette vérité.
Par M. DE FAURÉ, Géomètre.
Abscondisti hæc à sapientibus & prudentibus, & revelasti ea parvulis. Luc. cap. X. v. 21.
Aux dépens de L'AUTEUR.
MDCCXLVII

J. P. de Fauré, *Dissertation, découverte, et demonstrations de la quadrature mathematique du cercle*, 1747

Il problema risale alle origini della geometria, e tenne occupati i matematici per secoli. Tra i numerosi studiosi del problema: Nicola Cusano nel 1450, Oronzio Fineo nel 1544,[1] Vincent Léotaud nel 1654,[2] Ottavio Scarlattini nel 1690,[3] J. P. de Fauré nel 1740-47,[4] Filippo Carmagnini nel 1751,[5] Guillaume le Roberger de Vausenville nel 1774.[6]

Fu solo nel 1882 che l'impossibilità venne provata rigorosamente, anche se i

ORONTII
FINAEI DELPHINATIS,
REGII MATHEMATI-
CARVM LVTETIAE
PROFESSORIS,
Quadratura Circuli, tandem inuen-
ta & clarissimè demonstrata.
De circuli mensura, & ratione circiferentiæ ad diametrum, Demonstrationes duæ.
De multangulari omnis & regularis figuræ descriptione, Liber hactenus desideratus.
De inuenienda longitudinis locorum differentia, aliter quam per lunares eclipses, etiam dato quouis tempore, Liber admodum singularis.
Planisphærium geographicum, quo cum longitudinis ang. latitudinis differentiæ, tum directæ locorum deprehendantur elongationes.
LVTETIAE PARISIORVM,
Cum priuilegio Regis.

Oronzio Fineo, *Quadratura circuli*, 1544

matematici dell'antichità avevano compreso molto bene, sia intuitivamente che in pratica, la sua intrattabilità.

Trovare una soluzione richiederebbe la costruzione del numero $\sqrt{\pi}$ (infatti l'area del cerchio è πr^2, quindi un quadrato con area πr^2 deve avere lato pari a $r\sqrt{\pi}$). L'impossibilità di una tale costruzione, con le limitazioni imposte dall'uso esclusivo di riga e compasso, deriva dal fatto che π è un numero trascendente, ovvero non-algebrico, e quindi non-costruibile. La trascendenza di π fu dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882.

La soluzione del problema della quadratura del cerchio con riga e compasso implicherebbe quindi trovare anche un valore algebrico per π - il che si è dimostrato impossibile dopo il lavoro di Lindemann.

Ciò non implica invece che sia impossibile costruire un quadrato la cui area approssimi molto da vicino quella del cerchio dato. Ad esempio si può costruire un lato di $39/22 = 1,7727\ldots$, che è una buona approssimazione di $\sqrt{\pi} = 1,7724\ldots$.

La "quadratura del cerchio" come metafora

Nel 1882 Ferdinand von Lindemann pubblicò la dimostrazione della trascendenza di pi greco. Precedentemente egli aveva già dimostrato che se pi greco fosse stato trascendente, allora l'antico problema della quadratura del cerchio con riga e compasso sarebbe stato irrisolvibile. Fino a quel momento erano stati innumerevoli i tentativi della quadratura matematica del cerchio, tanto che l'espressione era (ed è) diventata sinonimo di un'impresa vana, senza speranza o priva di un significato concreto.

In senso meramente letterario, l'espressione "quadratura del cerchio", viene spesso usata per indicare la soluzione perfetta a un dato problema (anche se, come abbiamo visto, non esiste).

Significato della quadratura del cerchio

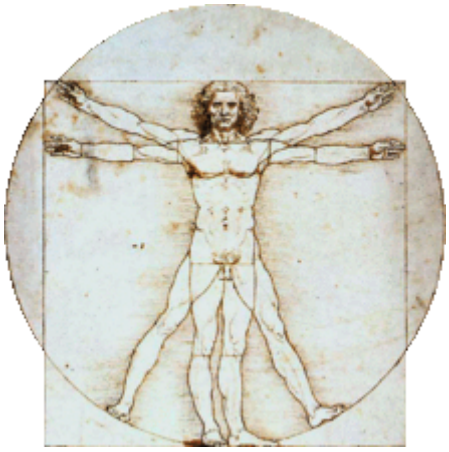
> «Qual è il geometra che tutto s'affige
> per misurar lo cerchio, e non ritrova,
> pensando, quel principio ond'elli indige,
> tal era io a quella vista nova.»
> (Dante, *Paradiso*, XXXIII, 133-136)

La quadratura del cerchio non era un semplice rompicapo ludico, ma rispondeva ad esigenze di natura profondamente esoterica, assurgendo a simbolo della congiunzione alchemica degli opposti e della pietra filosofale:[8] essendo il cerchio tradizionalmente associato al Cielo e il quadrato alla Terra,[9] far coincidere matematicamente le due figure equivaleva a comporre lo Spirito con la Materia, il Trascendente con l'Immanente, realizzando il *rebis* o l'androgino in cui consisteva il segreto della creazione.[8]

Conciliare il quadrato col cerchio significava in definitiva trovare la loro corrispondenza occulta, il catalizzatore in grado di risolvere ogni dualismo insanabile,[10] scoprendo il senso dell'analogia enunciata nel motto ermetico «come in alto così in basso».[11]

Quadratura alchemica del cerchio, simbolo geometrico della pietra filosofale.[7]

Mentre il cerchio rappresenta infatti l'Uno indifferenziato, la dinamicità e la ciclicità del tempo perenne senza inizio né fine, il quadrato rimanda alla sua realizzazione concreta nello spazio e alla stabilizzazione, come fa notare l'esoterista René Guénon che li pone in relazione al corso dell'attuale ciclo cosmico:[12]



L'uomo vitruviano, simbolo dell'analogia tra il Cielo, rappresentato dal cerchio, e la Terra, rappresentata dal quadrato.[10]

> «La forma del «Paradiso terrestre», che corrisponde all'inizio di questo ciclo, è circolare, mentre quella della «Gerusalemme celeste», che corrisponde alla sua fine, è quadrata. [...] Si potrebbe dire che è questo cerchio stesso a mutarsi alla fine in un quadrato, poiché le due estremità devono toccarsi, o meglio [...] corrispondersi esattamente.
>
> [...] D'altra parte il mutamento del cerchio in un quadrato equivalente è quanto viene designato come la "quadratura del cerchio"; coloro che dichiarano di quest'ultima che è un problema insolubile, pur se ignorano totalmente il suo significato simbolico, si trovano dunque ad avere di fatto perfettamente ragione, perché tale "quadratura", intesa nel suo vero senso, non potrà essere realizzata che alla fine vera e propria del ciclo.»
>
> (René Guénon, *Il Regno della Quantità e i Segni dei Tempi (http://www.gianfrancobertagni.it/materiali/reneguenon/regnotempi.pdf)* [1945], § 20, *Dalla sfera al cubo*, trad. it. di Tullio Masera e Pietro Nutrizio, Milano, Adelphi, 1982)

Guénon aggiunge che il quadrato si basa sul numero 4, il più perfetto perché presupposto indispensabile della manifestazione di tutti i numeri e di ogni altra possibilità di sviluppo, come evidenziato dal quaternario comune alle più svariate tradizioni (degli elementi, dei punti cardinali ecc.), oppure dalla *tetraktys* pitagorica che contiene in sé il denario, cioè il dieci, la totalità. Il 4 in tal caso è rappresentabile anche da una croce che ruotando genera dinamicamente la circonferenza, simbolo del 10, oppure viceversa da un cerchio diviso da una croce in quattro parti, in cui consiste propriamente la «quadratura del cerchio» espressa dalla formula: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.[12]

Gli stessi significati del cerchio e del quadrato si ritrovano in ambito massonico, simboleggiati dalla sovrapposizione di squadra e compasso,[8] unione degli opposti secondo quanto sostenuto dalla filosofia ermetica: «nella squadra e nel compasso si trova la perfezione del quadrato e del cerchio».[13] Furono inoltre usati in architettura e nelle planimetrie delle città.[14][15]

Note

1. ^ (LA) Oronzio Fineo, *Quadratura circuli*, Colines, Simon de, 1544.
2. ^ (LA) Vincent Léotaud, *Examen circuli quadraturae*, Lione, Guillaume Barbier, 1654.
3. ^ Giovanni Fantuzzi, *Scarlattini Ottavio*, in *Notizie degli Scrittori Bolognesi*, vol. 7, Bologna, Stamperia di S. Tommaso D'Aquino, 1789, pp. 355–359.
4. ^ (FR) J. P. de Faurè, *Dissertation, découverte, et demonstrations de la quadrature mathematique du cercle*, Genéve, J.P. de Faurè, 1747.

5. ^ Filippo Carmagnini, *Della quadratura del circolo e del doppiamento del cubo*, Firenze, Pietro Gaetano Viviani, 1751.
6. ^ (FR) Marie Jacob, *La quadrature du cercle: un problème à la mesure des Lumières*, Fayard, 2006, pp. 119–122.
7. ^ Figura presente ad esempio nel trattato alchemico *Atalanta fugiens* di Michael Maier (1618), emblema XXI.
8. Massimo Zappia, *La quadratura del cerchio*, su *freemasons-freemasonry.com*.
9. ^ *Quadratura del cerchio*, su *montezaga.wordpress.com*.
10. Miranda Lundy, *Quadrivium. Numero, geometria, musica, astronomia (https://books.google.it/books?id=4R064zr_eUAC&printsec=frontcover&hl=it&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=cerchiare%20il%20quadrato&f=false)*, p. 76, Sironi, 2011.
11. ^ Ermete Trismegisto, *Tavola di smeraldo*, n. 2.
12. René Guénon, *La Tetraktys e il Quadrato di Quattro*, su *fuocosacro.com*.
13. ^ *Dialogo sul compasso*, su *ritosimbolico.it*, Rito Simbolico Italiano, 2016.
14. ^ Elena Filippi, *"La quadratura del cerchio": Pio II, Cusano, Alberti e la ricerca della misura ideale per il nuovo cittadino dell'Europa moderna*, su «Canonica», n. 7, pag. 65, Centro Studi Pientini (2017).
15. ^ *Roma quadrata*, su *associazionearcheosoficaroma.it*.

Voci correlate

- Nicola Cusano
- Duplicazione del cubo
- Cerchio
- Geometria sacra
- Pietra filosofale
- Quadrato
- *Quadratura della parabola*
- Squadra e compasso
- Trisezione dell'angolo
- Progetto di legge dell'Indiana sul pi greco

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **quadratura del cerchio (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Squaring_the_circle?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Quadratura del cerchio*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- *Far quadrare il cerchio*, su *cut-the-knot.org*.
- *La geometria presso gli egizi*, su *specchiomagico.net*. URL consultato il 25 febbraio 2007 (archiviato dall'url originale il 18 marzo 2007).

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38080 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38080) · LCCN (EN) sh85026063 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85026063) · BNF

	(FR) cb120433809 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb120433809) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb120433809) · J9U (EN, HE) 987007286301505171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007286301505171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Quadratura_del_cerchio&oldid=132991972"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 14 apr 2023 alle 06:45.

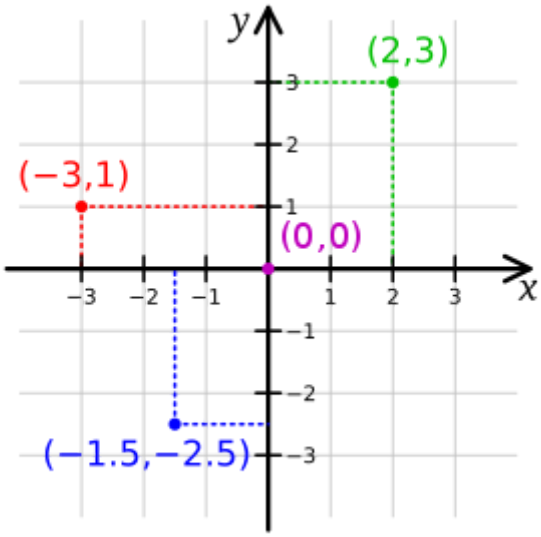
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Sistema di riferimento cartesiano

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, un **sistema di riferimento cartesiano** è un sistema di riferimento formato da n rette ortogonali,[1] intersecantesi tutte in un punto chiamato *origine*, su ciascuna delle quali si fissa un orientamento (sono quindi *rette orientate*) e per le quali si fissa anche un'unità di misura (cioè si fissa una metrica di solito euclidea) che consente di identificare qualsiasi punto dell'insieme mediante n numeri reali. In questo caso si dice che i punti di questo insieme sono in uno spazio di dimensione n.



Rappresentazione di alcuni punti nel piano cartesiano

Un sistema di riferimento cartesiano in due dimensioni viene chiamato piano cartesiano.

Per identificare la posizione di punti nello spazio fisico viene solitamente utilizzato un sistema di riferimento cartesiano a tre dimensioni. Tuttavia per descrivere la posizione di oggetti più complicati vengono utilizzati altri sistemi di riferimento non necessariamente cartesiani e un differente numero di dimensioni, dette in questo contesto gradi di libertà.

Usando un sistema di riferimento cartesiano, è possibile descrivere tramite equazioni algebriche forme geometriche come curve o superfici: i punti dell'oggetto geometrico sono quelli che soddisfano l'equazione associata. Per esempio è possibile descrivere una circonferenza nel piano cartesiano, oppure una quadrica nello spazio tridimensionale.

Indice

Storia

Piano cartesiano

- Il piano cartesiano come spazio vettoriale

Generalizzazione a tre dimensioni

Geometria analitica

- Forma esplicita e forma implicita
- L'equazione della retta

Note

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti
Collegamenti esterni

Storia

L'uso delle coordinate geometriche venne introdotto per la prima volta da Nicola d'Oresme, matematico del XIV secolo operante a Parigi[2]. L'aggettivo *cartesiano* è riferito al matematico e filosofo francese René Descartes (latinizzato in *Renatus Cartesius*, italianizzato in *Renato Cartesio*), il quale, tra le altre cose, riprendendo gli studi di Nicola d'Oresme, lavorò sulla fusione dell'algebra con la geometria euclidea. Questi studi furono influenti nello sviluppo della geometria analitica, del calcolo infinitesimale e della cartografia.

L'idea di questo sistema di riferimento fu sviluppato nel 1637 in due scritti da Cartesio e, indipendentemente, da Pierre de Fermat, anche se Fermat non pubblicò la sua scoperta[3]. Nella seconda parte del suo Discorso sul metodo, Cartesio introduce la nuova idea di specificare la posizione di un punto o di un oggetto su una superficie usando due rette che si intersecano in un punto come strumenti di misura, idea ripresa in *La Geometria* [4].

Piano cartesiano

Un sistema di coordinate cartesiane ortogonale in due dimensioni è semplicemente chiamato piano cartesiano, ed è costituito da:

- l'asse delle ascisse, orizzontale, che costituisce la retta di riferimento, chiamata da Oresme *longitudo* (solitamente caratterizzata dalla lettera x);
- l'asse delle ordinate, verticale, che costituisce la retta ortogonale alla retta di riferimento, chiamata da Oresme *latitudo* (solitamente caratterizzata dalla lettera y);
- l'origine, il punto nel quale le due rette si incontrano.

Il piano cartesiano, che viene spesso chiamato xy dal nome degli assi, può essere immaginato, pensando che il piano sia immerso orizzontalmente nello spazio fisico (pavimento), e mettendosi in piedi in un punto con il braccio sinistro teso in avanti e il braccio destro teso di lato in modo da formare con le due braccia un angolo retto: il punto sul quale si rappresenta l'origine, la direzione del braccio destro rappresenta l'asse delle ascisse positive (dalla parte opposta le ascisse negative), la direzione del braccio sinistro rappresenta l'asse delle ordinate positive (alle spalle le ordinate negative).

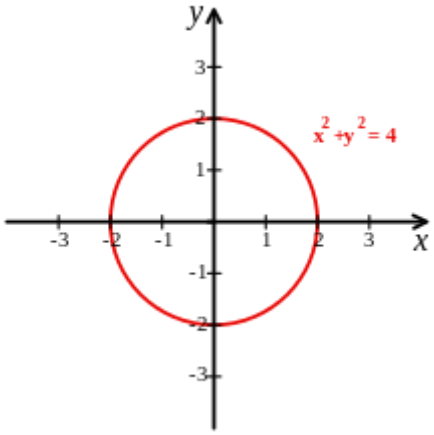
Il sistema costituito dalla coppia dei due assi orientati (e implicitamente dall'origine) consente di individuare ogni punto del piano con una coppia di numeri reali chiamati rispettivamente *ascissa* e *ordinata* del punto, i cui valori assoluti rappresentano le distanze del punto rispettivamente dall'asse y (ordinata) e dall'asse x (ascissa). Le coordinate di un punto generico del piano o di un punto che si pensa variabile spesso si denotano con x e y. I punti sull'asse x hanno quindi ordinata $y = 0$, mentre i punti sull'asse y hanno ascissa $x = 0$; di conseguenza l'origine ha coordinate $x = 0$ e $y = 0$. Talora il sistema dei due assi si denota con Oxy.

Un generico punto si può quindi esprimere scrivendo $(x; y)$ oppure $\langle x; y \rangle$. Ad esempio, i punti $(2; 3)$ e $(2; 5)$ hanno la stessa ascissa (quindi si trovano su una retta parallela all'asse y), mentre i punti $(2; 3)$ e $(-1; 3)$ hanno la stessa ordinata (quindi si trovano su una retta parallela all'asse x). In particolare: se due punti hanno la stessa ascissa ma ordinate opposte sono simmetrici rispetto all'asse x; se due punti hanno la stessa ordinata ma ascisse opposte sono simmetrici rispetto all'asse y; se due punti hanno coordinate opposte sono simmetrici rispetto all'origine.

Il piano cartesiano viene suddiviso in quattro regioni denominate quadranti, indicate mediante numeri romani progressivi in senso antiorario:

- I quadrante: comprende i punti aventi ascissa e ordinata positive;
- II quadrante: comprende i punti aventi ascissa negativa e ordinata positiva;
- III quadrante: comprende punti aventi ascissa e ordinata negative;
- IV quadrante: comprende punti aventi ascissa positiva e ordinata negativa.

Il piano cartesiano permette di rappresentare graficamente funzioni di equazione $y = f(x)$ in cui x è la variabile indipendente e y la variabile dipendente. Ciò permette di visualizzare la "forma" delle funzioni (o curve) e risolvere graficamente sistemi di più equazioni come intersezioni tra le curve corrispondenti.



L'equazione $x^2 + y^2 = 4$ rappresentata nel piano xy rappresenta una circonferenza di raggio 2 e centrata nell'origine.

Il piano cartesiano come spazio vettoriale

Per definizione, esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano cartesiano e le coppie ordinate di numeri reali. L'insieme di tutte le coppie di numeri reali, $\mathbb{R}^2$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. La base canonica di $\mathbb{R}^2$ è $E = (E_1, E_2)$ ove $E_1 = (1, 0)$ ed $E_2 = (0, 1)$. Gli elementi di E hanno un importante significato geometrico: sono i versori fondamentali sul piano, rispettivamente $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$. Ciò vuol dire, per la definizione stessa di base di uno spazio vettoriale, che il piano cartesiano è generato dai versori fondamentali e che ogni punto del piano è esprimibile, *in modo unico*, come combinazione lineare dei versori fondamentali (ciò giustifica l'espressione dei punti del piano cartesiano). Si noti inoltre che ogni asse cartesiano è sottospazio vettoriale del piano cartesiano.

Generalizzazione a tre dimensioni

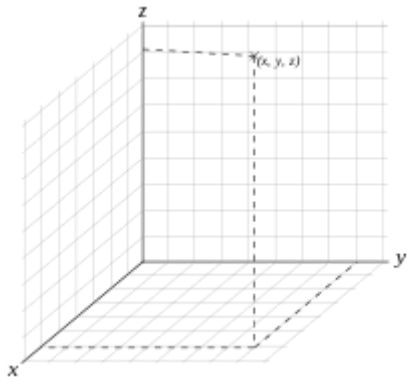
Aggiungendo una terza dimensione al piano otteniamo lo spazio euclideo tridimensionale, che è la modellizzazione a noi più familiare dello spazio fisico, e quella usata in meccanica classica: un sistema di assi cartesiani può quindi essere usato come sistema di riferimento per localizzare degli oggetti nello spazio, attribuendogli delle coordinate.

Essendo una diretta generalizzazione del piano cartesiano, un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale è formato da tre rette orientate perpendicolari tra loro e incidenti in un punto, denominato origine degli assi. I tre assi (chiamati solitamente x, y e z) identificano tre piani nello spazio (xy, xz e yz), che dividono lo spazio in otto ottanti, simili ai quattro quadranti formati dagli assi cartesiani in due dimensioni. Ogni punto è identificato da 3 coordinate, che rappresentano ognuna la distanza del punto al piano formato dagli altri due.

Come nel caso del piano, ogni punto dello spazio tridimensionale può essere individuato da un vettore nello spazio tridimensionale (indicato come $\mathbb{R}^3$) e viene espresso come combinazione lineare dei tre versori di base, indicati convenzionalmente con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$:

$$\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

dove x, y e z rappresentano proprio le coordinate nel punto nel sistema di riferimento formato dalla base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.



Il primo ottante di un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, con l'asse x che punta verso l'osservatore ("esce" dallo schermo). Sono evidenziate le proiezioni del punto sull'asse z, sul piano xy e le successive proiezioni sui due assi x e y.

Geometria analitica

Il piano cartesiano (e più in generale il sistema di riferimento cartesiano a n dimensioni) ha permesso di conciliare la geometria e l'algebra in un'unica branca della matematica: la *geometria analitica* (chiamata così dall'analisi matematica). Per esempio nel piano cartesiano una retta rappresenta le soluzioni di un'equazione di primo grado in due variabili x e y del tipo $ax + by + c = 0$; l'intersezione di due (o più) rette rappresenta un sistema di equazioni lineari.

Forma esplicita e forma implicita

Le equazioni di cui si è detto prima possono essere espresse in due forme: la forma esplicita e la forma implicita.

Nel caso ad esempio di una retta, la prima consiste un'equazione del tipo $y = mx + q$, mentre la seconda si presenta come $ax + by + c = 0$. Per passare dalla forma implicita a quella esplicita basta portare tutti i termini escluso by nel secondo membro e poi dividere per *b* (*principio di equivalenza delle equazioni*). Si noti che, nella forma esplicita, il termine noto q, detto intercetta o ordinata all'origine, indica l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y, mentre il coefficiente dell'incognita x, m, è detto coefficiente angolare ed indica la "pendenza" della retta. Naturalmente il passaggio dalla forma implicita a quella esplicita è possibile solo se il coefficiente b è diverso da zero, cioè solo se la retta non è parallela all'asse delle ordinate.

L'equazione della retta

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Retta nel piano cartesiano***.

Dati due punti distinti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, l'equazione della retta passante per quei punti è: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ anche detta $y = mx + q$ dove m è il coefficiente angolare dato da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Note

1. ^ In generale non è necessario che le rette siano ortogonali tra loro, ma i sistemi ortogonali sono in generale molto più semplici da usare.
2. ^ Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Milano, Aldo Garzanti, 1970-1971.
3. ^ "analytic geometry". *Encyclopædia Britannica* (Encyclopædia Britannica Online), 2008. Consultato il 02-08-2008.

4. ^ (FR) Descartes, René, *La Géométrie*, p. Livre Premier: Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites (Book one: Problems whose construction requires only circles and straight lines).

Bibliografia

- (EN) David A. Brennan, Matthew F. Esplen e Jeremy J. Gray, *Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 1998, ISBN 0-521-59787-0.
- (EN) James R. Smart, *Modern Geometries (5th Ed)*, Pacific Grove, Brooks/Cole, 1998, ISBN 0-534-35188-3.
- (FR) Descartes, René, *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology*, Trans. by Paul J. Oscamp, Revised, Indianapolis, IN, Hackett Publishing, 2001, ISBN 0-87220-567-3, OCLC 488633510.
- (EN) Korn GA, Korn TM, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, 1st, New York, McGraw-Hill, 1961, pp. 55–79, LCCN 59-14456, OCLC 19959906.
- (EN) Margenau H, Murphy GM, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, New York, D. van Nostrand, 1956, LCCN 55-10911.
- (EN) Moon P, Spencer DE, *Rectangular Coordinates (x, y, z)*, in *Field Theory Handbook, Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions*, corrected 2nd, 3rd print, New York, Springer-Verlag, 1988, pp. 9–11 (Table 1.01), ISBN 978-0-387-18430-2.
- (EN) Morse PM, Feshbach H, *Methods of Theoretical Physics, Part I*, New York, McGraw-Hill, 1953, ISBN 0-07-043316-X, LCCN 52-11515.
- (EL) Sauer R, Szabó I, *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*, New York, Springer Verlag, 1967, LCCN 67-25285.

Voci correlate

- Cartesio
- Diagramma
- Piano complesso
- Retta dei numeri reali
- Retta nel piano cartesiano
- Sistema di riferimento
- Sistema di coordinate polari
- Sistema di coordinate terrestri
- Spazio (fisica)

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sul **sistema di riferimento cartesiano (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cartesian_coordinates?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Sistema di riferimento cartesiano*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.

- (EN) Eric W. Weisstein, *Sistema di riferimento cartesiano*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *Sistema di riferimento cartesiano*, su *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society.
- (EN) *Costruire oggetti di geometria analitica*, su *mygeometryteacher.com*. URL consultato il 3 marzo 2008 (archiviato dall'url originale il 15 settembre 2017).

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 61799 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=61799) · GND (DE) 4370913-8 (https://d-nb.info/gnd/4370913-8)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_di_riferimento_cartesiano&oldid=131732578"

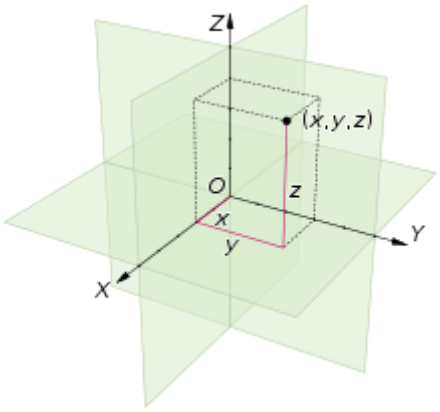
Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 25 gen 2023 alle 13:50.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Spazio euclideo

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, uno **spazio euclideo** è uno spazio affine in cui valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea.[1] Si tratta dello spazio di tutte le *n*-uple di numeri reali, che viene munito di un prodotto interno reale (prodotto scalare) per definire i concetti di distanza, lunghezza e angolo.[2] È un particolare esempio di spazio affine reale che fornisce una generalizzazione degli spazi a due e a tre dimensioni studiati dalla geometria euclidea. Lo spazio euclideo è uno spazio di Hilbert reale a dimensione finita.



Ogni punto dello spazio euclideo tridimensionale è determinato da tre coordinate.

Indice

Spazio R^n
Basi di spazi vettoriali
Struttura euclidea
Generalizzazione sui complessi
Topologia euclidea
Invarianza dei domini
Varietà e strutture esotiche
Note
Bibliografia
Voci correlate
Collegamenti esterni

Spazio R^n

Dato il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, sia n un numero naturale. Una n-*upla* di numeri reali è un insieme ordinato $(x_1, \ldots, x_n)$ di n numeri reali. Lo spazio di tutte le n-uple di numeri reali forma uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, indicato con $\mathbb{R}^n$. Le operazioni di somma e prodotto per scalare sono definite da:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);$$
$$a\,\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$

Basi di spazi vettoriali

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Base (algebra lineare)***.

Una base dello spazio $\mathbb{R}^n$ che presenta vari vantaggi è la sua cosiddetta base canonica:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\\
&\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
&\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Un vettore arbitrario in $\mathbb{R}^n$ può dunque essere scritto nella forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è il prototipo di uno spazio vettoriale reale a dimensione n: infatti ogni spazio vettoriale V di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Si nota che non si impone un isomorfismo *canonico*: la scelta di un isomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e V è equivalente alla scelta di una base per V. In molte fasi dello sviluppo dell'algebra lineare gli spazi vettoriali a dimensione n vengono comunque studiati in astratto, perché molte considerazioni sono più semplici ed essenziali se svolte senza fare riferimento a una base particolare.

Struttura euclidea

Lo spazio euclideo è più che un semplice spazio vettoriale. Per ottenere la geometria euclidea si deve poter parlare di distanze e angoli, iniziando con la distanza fra due punti e l'angolo formato da due rette o da due vettori. Il modo intuitivo per fare questo è l'introduzione di quello che viene chiamato *prodotto scalare standard* su $\mathbb{R}^n$. Questo prodotto, se i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono riferiti alla base canonica definita sopra, è definito da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Lo spazio delle n-uple di numeri reali arricchito con il prodotto scalare, funzione che a due n-uple di reali $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ associa un numero reale, costituisce una struttura più ricca di $\mathbb{R}^n$ chiamata "spazio euclideo" n-dimensionale. Per distinguerlo dallo spazio vettoriale delle n-uple reali in genere viene denotato con E^n.

Il prodotto scalare permette di definire una "lunghezza" non negativa per ogni vettore $\mathbf{x}$ di E^n nel seguente modo:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}.$$

Questa funzione lunghezza soddisfa le proprietà richieste per una norma e viene chiamata *norma euclidea* o *norma pitagorica* su $\mathbb{R}^n$. L'*angolo* (interno) θ fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di E^n è quindi definito come:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}\right),$$

dove $\arccos$ è la funzione arcocoseno. Potrebbe sembrare che l'uso della funzione arcocoseno generi delle circolarità logiche; difatti tale funzione è definita come l'inversa di una restrizione del coseno e il coseno è spesso definito a partire da nozioni di geometria euclidea.

Tali circolarità possono essere evitate, definendo il coseno tramite la sua serie di Taylor[3]:

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Con queste definizioni la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ diventa una base ortonormale per lo spazio euclideo ottenuto arricchendolo con il prodotto scalare standard.

A questo punto si può usare la norma per definire una funzione distanza (o metrica) su $\mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

La forma di questa funzione distanza è basata sul teorema di Pitagora, ed è chiamata *metrica euclidea*.

Ogni spazio euclideo quindi costituisce un esempio (a dimensione finita) di spazio di Hilbert (vedere anche spazio prehilbertiano), di spazio normato e di spazio metrico.

Va osservato che in molti contesti, lo spazio euclideo di n dimensioni viene denotato con $\mathbb{R}^n$, dando per scontata la struttura euclidea. In effetti per molti fini applicativi la distinzione che si è fatta non ha gravi conseguenze e la suddetta identificazione va considerata un abuso di linguaggio veniale. Infatti negli spazi euclidei si possono introdurre le nozioni di sottospazio e di trasformazione lineare senza complicazioni rispetto a quanto fatto per gli spazi vettoriali.

Si osserva anche che ogni sottospazio vettoriale W di dimensione *m* (< *n*) di E^n è isometrico allo spazio euclideo E^m, ma non in modo canonico: per stabilire una corrispondenza utilizzabile per dei calcoli è necessaria la scelta di una base ortonormale per W e questa, se in W non si trova alcun vettore della base canonica di E^n, non può servirsi di alcun elemento di tale base.

Generalizzazione sui complessi

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Spazio prehilbertiano****.*

Accanto agli spazi euclidei reali si possono introdurre loro varianti sui numeri complessi, arricchendo lo spazio vettoriale *n*-dimensionale sul campo dei complessi con un cosiddetto *prodotto interno hermitiano* costituito da una forma sesquilineare.

In questo caso il prodotto scalare tra vettori viene definito con l'espressione:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*.$$

La proprietà riflessiva di tale composizione diventa:

$$(x, y) = (y, x)^*$$

e per la moltiplicazione per uno scalare si ha:

$$(x, \lambda y) = \lambda^* (x, y).$$

Topologia euclidea

Dal momento che lo spazio euclideo è uno spazio metrico, lo si può considerare anche uno spazio topologico dotandolo della naturale topologia indotta dalla metrica. Questo può farsi definendo come base di insiemi aperti l'insieme delle palle aperte, insiemi dei punti che distano da un punto dato meno di un reale positivo fissato (raggio della palla). Mediante questi insiemi aperti si definiscono tutte le nozioni che servono alla topologia metrica su E^n. Questa è detta *topologia euclidea* e si rivela equivalente alla topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ considerato come prodotto di n copie della retta reale $\mathbb{R}$ dotata della sua usuale topologia.

Con la "strumentazione" degli spazi vettoriali topologici gli spazi euclidei sono in grado di fornire gli ambienti nei quali sviluppare sistematicamente numerose nozioni dell'analisi matematica, della geometria euclidea, della geometria differenziale e della fisica matematica classica.

Invarianza dei domini

Un risultato importante per la topologia di $\mathbb{R}^n$ è l'invarianza dei domini di Brouwer. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ (con la sua topologia del sottospazio), omeomorfo a un altro sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, è esso stesso aperto. Un'immediata conseguenza di questo è che $\mathbb{R}^m$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se $m \neq n$, un risultato intuitivamente "ovvio" ma che è difficile da dimostrare rigorosamente.

Varietà e strutture esotiche

Lo spazio euclideo è il prototipo di varietà topologica, e anche di varietà differenziabile. I due concetti coincidono in generale, tranne in dimensione 4: come mostrato da Simon Donaldson e da altri, è possibile assegnare all'insieme $\mathbb{R}^4$ delle "strutture differenziali esotiche", che rendono lo spazio topologico $\mathbb{R}^4$ non diffeomorfo allo spazio standard.

Note

1. ^ Encyclopedia Britannica - Euclidean space (https://www.britannica.com/EBchecked/topic/194913/Euclidean-space)
2. ^ Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989, p. 227.
3. ^ Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Borlinghieri.

Bibliografia

- Serge Lang, *Algebra lineare*, Torino, Bollati Boringhieri, 1992, ISBN 88-339-5035-2.
- (EN) W.W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, 4th, Dover Publications, 1960 [1908], pp. 50–62, ISBN 0-486-20630-0.
- (EN) M. Berger, *Geometry* , **I** , Springer (1987)

Voci correlate

- Base
- Forma sesquilineare
- Geometria euclidea
- Prodotto scalare
- Spazio di Minkowski

- Spazio prehilbertiano
- Superspazio

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Spazio euclideo*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Spazio euclideo*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) E.D. Solomentsev, *Euclidean space*, in *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society, 2002.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 27865 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=27865) · GND (DE) 4309127-1 (https://d-nb.info/gnd/4309127-1) · BNF (FR) cb122864798 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb122864798) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb122864798) · NDL (EN, JA) 00562065 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00562065)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Spazio_euclideo&oldid=132216977"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 25 feb 2023 alle 11:25.

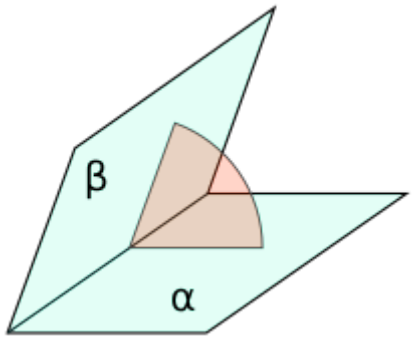
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Angolo diedro

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

L'**angolo diedro** è una possibile estensione del concetto di angolo in uno spazio a tre dimensioni. Viene definito come la porzione di spazio compresa tra due semipiani (detti facce) aventi per origine la stessa retta (detta spigolo).



L'angolo diedro compreso tra due semipiani

Indice

- Misura dell'angolo diedro
- Proprietà
- Applicazioni pratiche
- Giacitura
- Voci correlate
- Altri progetti
- Collegamenti esterni

Misura dell'angolo diedro

La misura dell'angolo diedro coincide con la misura dell'angolo piano ottenuto sezionando l'angolo diedro con un piano perpendicolare allo spigolo (sezione normale).

In base alla misura è possibile classificare gli angoli diedri in:

Denominazione	misura (gradi)	misura (radianti)
retto	$90°$	$\frac{\pi}{2}$
acuto	$< 90°$	$< \frac{\pi}{2}$
ottuso	$> 90°$	$> \frac{\pi}{2}$
piatto	$180°$	π

Due angoli diedri si dicono complementari se la loro somma è un angolo retto, adiacenti se la loro somma è un angolo piatto.

Proprietà

- Due semipiani con la stessa generatrice, generano sempre due angoli diedri; in generale, uno di questi è convesso e l'altro concavo; come caso particolare, se i semipiani sono uno il prolungamento dell'altro si generano due angoli piatti.
- Due angoli diedri opposti (cioè tali che le facce di uno sono i prolungamenti delle facce dell'altro) sono congruenti.

Applicazioni pratiche

- In architettura l'angolo diedro indica solitamente l'angolo di massima pendenza di un piano inclinato (rampe pedonabili e/o carrabili, falde di copertura inclinate, ecc.) rispetto a un piano orizzontale. La misura della pendenza del piano inclinato viene calcolata in percentuale del rapporto tra avanzamento verticale e avanzamento orizzontale. Ad esempio, la pendenza del 100% equivale a una inclinazione di 45º. Essa si calcola matematicamente con la funzione tangente dell'angolo che caratterizza il piano inclinato rispetto al suolo. La funzione tangente è espressa come rapporto tra il seno dell'angolo considerato (lo spostamento verticale) e il coseno dello stesso angolo (lo spostamento orizzontale).

Giacitura

In geometria descrittiva il termine *giacitura* indica l'angolo diedro formato da un dato piano α con uno stabilito piano di riferimento. Spesso la giacitura di un piano α viene misurata come angolo di massima pendenza tra tale piano e un piano di riferimento orizzontale. Nel metodo delle proiezioni centrali l'immagine della giacitura di un piano α si determina come retta d'intersezione del piano proiettante parallelo ad α con lo stabilito piano di proiezione.

Considerato che due rette incidenti individuano un solo piano e poiché tali rette individuano due direzioni, per cui tutti i piani che passano per tali direzioni hanno in comune la stessa giacitura. In questo modo si può affermare che *due rette sghembe individuano una sola giacitura*.

Voci correlate

- Angolo piano
- Angolo solido

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **angolo diedro (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Dihedral_angles?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Angolo diedro*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	GND (DE) 4375383-8 (https://d-nb.info/gnd/4375383-8)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Angolo_diedro&oldid=131928001"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 6 feb 2023 alle 19:48.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Angolo solido

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In geometria un **angolo solido** è un'estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo piano. Esso è definito come ciascuna delle due regioni in cui viene suddiviso lo spazio dalla superficie formata dalle semirette che hanno origine in uno stesso punto (detto vertice dell'angolo solido) e passanti per i punti di una curva chiusa semplice tracciata su una superficie non contenente il vertice. L'unità di misura dell'angolo solido è lo steradiante.

Un caso particolare di angolo solido è l'**angoloide poliedrico** (o semplicemente **angoloide**) che si ottiene quando la curva è un poligono. Un angoloide può essere chiamato **angoloide quadrico** quando ammette che le proprie facce siano tangenti a una quadrica di rotazione, come avviene nel caso dell'angoloide triedrico.

Indice

Misura dell'angolo solido

Esempi

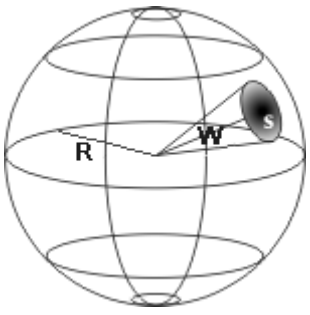
Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Misura dell'angolo solido

La misura in steradianti dell'angolo solido Ω è definita come A/R^2, dove A è l'area della porzione di superficie sferica di raggio R vista sotto l'angolo Ω. Tale definizione è indipendente dal particolare valore del raggio scelto, ed è un'estensione allo spazio tridimensionale della definizione della misura di un angolo piano θ in radianti come s/r, dove s è la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio r sotteso da θ. L'angolo solido sotteso da una superficie generica rispetto a un punto P è dunque equivalente a quello sotteso dalla proiezione della stessa superficie su una sfera di raggio qualsiasi centrata in P.



Angolo solido W sotteso in una sfera di raggio R

Dalla precedente definizione consegue che l'angolo solido sotteso dall'intera superficie sferica misura 4π. Per avere la misura in gradi quadrati si moltiplica il valore in steradianti per $(180/\pi)^2$, ovvero per $\approx 3282,8$. Quindi tutta la sfera corrisponde a circa 41253 gradi quadrati.

Esempi

- Nel caso di un cono di apertura α, la misura dell'angolo solido Ω rispetto al vertice è uguale a:

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Caso particolare è l'angolo solido sotteso da mezza sfera, cioè da un angolo pari a π. La formula diventa:

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi(1-0) = 2\pi,$$

che è uguale alla metà di 4π che è l'intero angolo solido.

- Una semplice formula per calcolare la misura dell'angolo solido sotteso di un triangolo di vertici $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ e $\mathbf{R}_3$ e visto dall'origine è stata formulata da Oosterom e Strackee:

$$\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \frac{|\mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)|}{R_1 R_2 R_3 + (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2)R_3 + (\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3)R_1 + (\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_1)R_2},$$

dove:

$\mathbf{R}_i$ è la rappresentazione vettoriale del punto i;
R_i denota la distanza del punto i dall'origine (norma euclidea di $\mathbf{R}_i$);
$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j$ denota il prodotto scalare;
$\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j$ denota il prodotto vettoriale;
$|\cdot|$ denota il valore assoluto.

Ω è anche l'area del triangolo che giace in una sfera centrata nell'origine e di raggio unitario, avente come lati i segmenti di intersezione della sfera con i piani passanti per l'origine e due vertici.

Il segno del numeratore (prima della valutazione del modulo) indica se dall'origine è visibile la faccia interna del triangolo ($+$) o la faccia esterna ($-$). L'orientazione della triangolo è definita tramite l'orientazione dei suoi vertici (senso orario o antiorario).

Nota bene: nel caso in cui il denominatore risultasse negativo, l'arcotangente restituirebbe un valore negativo, a cui deve essere aggiunto π.

Il sole e la luna sono visti dalla Terra all'incirca sotto lo stesso angolo solido, che corrisponde più o meno a 1/100000 della volta celeste.

Voci correlate

- Angolo
- Steradiante
- Angolo diedro
- Bisettrice di un angoloide

- Coni quadrici
- Poliedri
- Sezione retta
- Incentroide
- Circocentroide

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **angolo solido (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Solid_angle?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (EN) *IUPAC Gold Book, "solid angle"*, su *goldbook.iupac.org*.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Angolo_solido&oldid=120883211"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 26 mag 2021 alle 03:56.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Poliedro

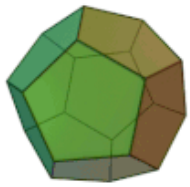
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Poliedro (disambigua)**.*

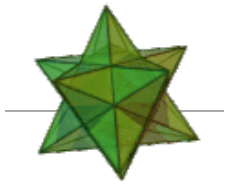
In matematica, e in particolare in geometria solida e in teoria dei grafi, un **poliedro** è un solido delimitato da un numero finito di facce piane poligonali. Come primi poliedri da prendere in considerazione, per la loro semplicità, vi sono i cubi, i parallelepipedi, le piramidi e i prismi. Fra i poliedri più complessi occupano un ruolo centrale i cinque solidi platonici, noti fin dall'antica Grecia.

Il termine *poliedro* deriva dal greco πολύεδρον (πολύς, *polys* = "molti" e ἕδρον, *édron* = "faccia"). Molti oggetti microscopici naturali (molecole, protozoi, virus, etc.) hanno forme o simmetrie poliedrali. I cristalli si possono presentare in questa forma anche a livello macroscopico.

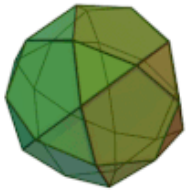
Alcuni poliedri



Dodecaedro
(Poliedro platonico)

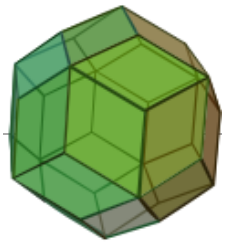


Piccolo dodecaedro stellato
(Poliedro di Keplero-Poinsot)

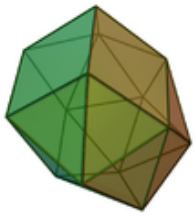


Icosidodecaedro
(Poliedro archimedeo)

Prisma stellato
(Poliedro uniforme stellato)



Triacontaedro rombico
(Poliedro di Catalan)



Ebesfenomegacorona
(Poliedro di Johnson)

Indice

Nozioni di base
- Definizione
- Facce
- Spigoli
- Vertici
- Adiacenze e incidenze
- Quantità

Altre nozioni
- Convessità
- Scheletro
- Sviluppo piano
- Struttura combinatoria e metrica

Proprietà topologiche
- Topologia della superficie
- Relazione di Eulero

Simmetrie
- Tipi di simmetria
- Piani, assi e centro di simmetria
- Chiralità
- Regolarità
- Gruppo di simmetria

Dualità

Classi di poliedri
- Prismatoidi
- Solidi platonici

- Poliedri di Keplero-Poinsot
- Poliedri uniformi
- Solidi di Johnson
- Poliedri composti

Operazioni con i poliedri
- Troncamento
- Stellazione
- Tassellazione

Poliedri nel mondo reale
- Naturali
  - Minerali
  - Radiolari
- Artificiali
  - Piramidi
  - Dadi
  - Cupole geodetiche

Note

Bibliografia

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Nozioni di base

Definizione

In matematica non esiste una definizione univoca di poliedro.[1] Nei casi più studiati, i poligoni formano una superficie che delimita una zona solida dello spazio: in questo caso per *poliedro* si intende questo solido, e non solo i poligoni che ne delimitano la superficie. Nei libri di testo la definizione formale di "poliedro" è spesso accompagnata da ipotesi tecniche aggiuntive, volte ad escludere alcuni casi considerati "patologici". Ad esempio, in Dedò (1999, p. 65) si definisce una *superficie poliedrale* come un numero finito di poligoni nello spazio tali che:

1. l'intersezione di due facce è vuota oppure uno spigolo o un vertice,
2. ogni spigolo appartiene precisamente a due facce,
3. due facce adiacenti non sono complanari,
4. fissato un vertice v e due facce f, g incidenti su v, esiste una catena di facce $f_1, \ldots, f_n$ contenenti v tali che $f = f_1$, $g = f_n$ e f_i sia adiacente a f_{i+1} per ogni i.

La scelta di ipotesi tecniche aggiuntive non è però univoca e dipende fortemente dalla scelta dell'autore. Le ipotesi qui elencate sono volte rispettivamente ad impedire che:

1. due facce si intersechino nel loro interno (cosa che però si deve ammettere se si vogliono considerare anche i poliedri di Keplero-Poinsot, presenti in questa voce),
2. uno spigolo appartenga a 4, 6 o più facce, come nell'unione di due poliedri che si intersecano solo in uno spigolo,
3. due facce si sovrappongano, o che vi siano spigoli "finti" con angolo diedrale di 180°,

4. un vertice V appartenga localmente a 2 o più pezzi distinti, come nell'unione di due poliedri che si intersecano solo in un vertice.

Facce

I poligoni sono le *facce* del poliedro. Le facce possono avere le forme più svariate: possono essere tutte congruenti come nel cubo, avere sempre lo stesso numero di lati senza però essere congruenti come in un più generico parallelepipedo, oppure avere numero di lati variabile come in un prisma o una piramide.

Un cubo ha 6 facce quadrate, 12 spigoli e 8 vertici.

Spigoli

I lati delle facce sono gli *spigoli* del poliedro; per definizione, uno spigolo appartiene contemporaneamente a due facce distinte e la sua quantità più rappresentativa è la lunghezza. Un poliedro può possedere spigoli di lunghezza costante (come nel cubo) o variabile.

Le due facce che toccano uno spigolo formano un angolo, detto angolo diedrale, che varia in generale da spigolo a spigolo, ma che può assumere un valore costante in alcuni poliedri: per esempio, nel cubo è sempre un angolo retto, mentre nel tetraedro è approssimativamente di 70° 32′.

La piramide quadrata ha un vertice di valenza 4 e quattro vertici di valenza 3.

Vertici

I vertici delle facce (cioè le estremità degli spigoli) sono i *vertici* del poliedro. Ogni vertice appartiene almeno a 3 facce distinte. Il numero n di facce cui appartiene è anche uguale al numero di spigoli che tocca: questo numero è la valenza del vertice.

La cuspide di un vertice è la struttura locale del poliedro intorno a questo.

Adiacenze e incidenze

Si dicono *vertici adiacenti* del poliedro due vertici che sono estremità di uno stesso spigolo; si dicono *spigoli adiacenti* del poliedro due spigoli che hanno un vertice in comune; si dicono *facce adiacenti* del poliedro due facce che hanno uno spigolo in comune. Ciascuna delle tre relazioni di adiacenza fra vertici, spigoli e facce di un poliedro chiaramente è una relazione simmetrica.

Nel tetraedro due facce qualsiasi sono sempre adiacenti.

Ad esempio, in un tetraedro due vertici e due facce sono sempre adiacenti, mentre uno spigolo è adiacente a tutti gli altri spigoli tranne uno (detto *opposto*).

Per fissare una terminologia, si introducono anche tre *relazioni di incidenza*; si dicono *incidenti*: un vertice e uno spigolo di cui il vertice è estremità; un vertice e una faccia di cui il vertice fa parte; uno spigolo e una faccia della quale lo spigolo è lato.

Quantità

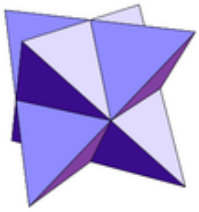
Per ogni F maggiore o uguale a 4 esiste un poliedro con F facce. Una prima classificazione dei poliedri riguarda il numero delle loro facce: un poliedro di 4, 5, 6, 7, 8, ...12, ...20, ... facce può essere chiamato rispettivamente tetraedro, pentaedro, esaedro, ettaedro, ottaedro,... dodecaedro,... icosaedro,... secondo i prefissi numerici greci usati anche per i poligoni. I nomi ottaedro, dodecaedro e icosaedro sono però generalmente riservati a tre poliedri ben specifici, e non ad un generico poliedro con 8, 12 e 20 facce: si tratta di tre dei 5 solidi platonici.

Un esaedro.

Il numero di facce, spigoli e vertici di un poliedro forma una terna di numeri indicati con (F, S, V). Il tetraedro è il più piccolo poliedro, nel senso che esso presenta 4 facce, 6 spigoli e 4 vertici, mentre per tutti i poliedri rimanenti valgono le relazioni $F > 4$, $S > 6$, $V > 4$.

Altre nozioni

Convessità



La stella octangula è un poliedro non convesso.

Un *poliedro convesso* è un poliedro che individua un solido convesso. Questa condizione può essere espressa in vari modi equivalenti.

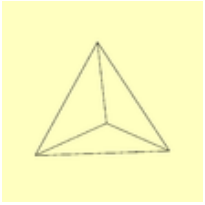
- Per ogni coppia di punti del solido, il segmento che li unisce è contenuto interamente nel solido (questa è la definizione usuale di insieme convesso nello spazio);
- Per ogni coppia di vertici, il segmento che li unisce è contenuto interamente nel solido;[2]
- Il piano contenente ciascuna faccia divide lo spazio in due semispazi, ed il poliedro è interamente contenuto in ciascuno di questi.

Un poliedro non convesso è a volte detto *concavo*.

I poliedri più noti sono convessi. Mentre la definizione generale di poliedro varia a seconda dell'autore, esiste una definizione di poliedro convesso universalmente accettata dai matematici, descritta sotto. Un *semispazio* è una delle due porzioni di spazio delimitate da un piano.

> Un *poliedro convesso* è una zona limitata dello spazio ottenuta come intersezione di un numero finito di semispazi.

A partire da questa definizione, è possibile definire le *facce* come i poligoni ottenuti intersecando il poliedro con i piani che delimitano questi semispazi. Ad esempio, il cubo è un poliedro convesso con 6 facce e può essere ottenuto come intersezione di 6 semispazi, delimitati dai piani contenenti le facce.



Scheletro del tetraedro, proiettato nel piano.

Scheletro

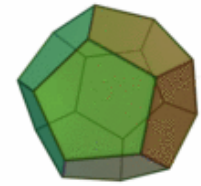
Vertici e spigoli di un poliedro formano un grafo, detto *scheletro* del poliedro. Ad esempio, lo scheletro del tetraedro è un grafo completo con 4 vertici.

Modello di uno scheletro nello spazio.

Lo scheletro di un poliedro convesso è un grafo planare: infatti è possibile proiettare da un punto interno del poliedro il grafo su una qualsiasi sfera centrata nel punto, e quindi successivamente nel piano tramite una proiezione stereografica. Il grafo di un poliedro più complesso può non essere planare.

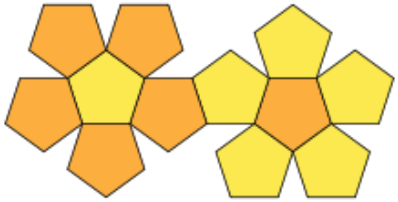
Sviluppo piano

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Sviluppo piano di un poliedro***.



Il dodecaedro...

Lo sviluppo piano di un poliedro è una figura piana che consiste in un certo numero di poligoni accoppiati lungo alcuni lati, che possono essere piegati nello spazio in modo da chiudersi e formare un poliedro. Lo sviluppo piano è uno strumento concreto utile per costruire poliedri di carta.

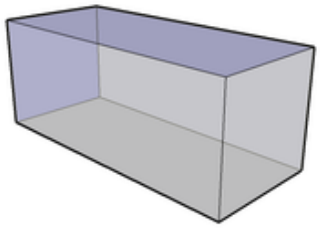


...e un suo sviluppo.

Qualsiasi poliedro convesso può essere costruito a partire da uno sviluppo piano. Lo stesso poliedro può essere costruito a partire da sviluppi piani differenti: l'insieme dei poligoni presenti è sempre lo stesso (sono le facce del poliedro), ma il percorso che queste formano può essere differente.[3]

Struttura combinatoria e metrica

La *struttura combinatoria* di un poliedro è l'insieme dei suoi vertici, spigoli e facce e le relazioni di incidenza fra questi. La *struttura metrica* di un poliedro è invece la struttura del poliedro come spazio metrico, cioè come spazio dotato di distanza fra punti.



Un parallelepipedo ha sempre la stessa struttura combinatoria, a prescindere dalle lunghezze dei lati e dagli angoli che questi formano.

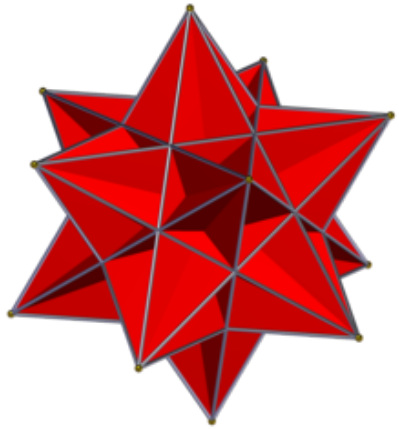
Una rotazione intorno ad un asse o una traslazione lasciano immutate le strutture metriche e combinatorie del poliedro. Una omotetia trasforma la struttura metrica (poiché modifica ad esempio le distanze fra i vertici) ma lascia invariata la struttura combinatoria. Più in generale, la struttura combinatoria è più flessibile: ad esempio, due parallelepipedi hanno sempre la stessa struttura combinatoria, ma non necessariamente metrica.

La terna (F, S, V) dà una buona descrizione della struttura combinatoria del poliedro: la descrizione non è però completa, perché non contiene tutte le informazioni sulle adiacenze. Un'ulteriore informazione è la valenza dei vertici.

Proprietà topologiche

Le proprietà topologiche di un poliedro sono quelle che ne descrivono solamente la forma globale. I poliedri più studiati (ad esempio, i convessi) hanno tutti la stessa forma topologica: sono "topologicamente equivalenti" ad una palla; tali poliedri sono detti *semplici*. Per i poliedri semplici vale una formula importante, detta relazione di Eulero.

Topologia della superficie



Il grande icosaedro ha 20 facce triangolari che si intersecano fra loro.

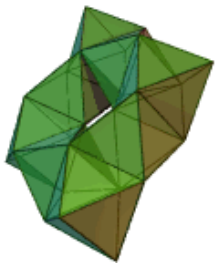
La superficie di un poliedro è l'unione delle sue facce. In alcuni casi, come nel grande icosaedro mostrato in figura, queste facce possono intersecarsi, e formare quindi una figura complicata. Quando questo accade, può non essere chiaro quale sia la porzione solida di spazio da considerare effettivamente "compresa" dalle facce. Questo fenomeno è simile a quello che si presenta in dimensione 2 nei poligoni stellati.

Nei casi più studiati però le facce non si intersecano e formano effettivamente una superficie che può essere studiata da un punto di vista topologico: se ne descrive cioè la forma globale, disinteressandosi degli angoli formati localmente dai vari spigoli e vertici. Una superficie delimita sempre una porzione di spazio.[4]

Da un punto di vista topologico, una superficie nello spazio è caratterizzata soprattutto dal "numero di pezzi disgiunti" e dal "numero di buchi". Quando questa è formata da un pezzo solo e non ha buchi, è equivalente ad una sfera. I

pezzi disgiunti ed il numero di buchi in matematica sono formalizzati rispettivamente con le nozioni di componente connessa e genere. Un poliedro con un buco ha una superficie avente la forma di un toro.

Un poliedro le cui facce formano una superficie con un pezzo solo e senza buchi è detto **semplice**. I poliedri convessi, e la maggior parte dei poliedri studiati, sono semplici.



Un poliedro con un buco, avente la topologia di un toro.

Relazione di Eulero

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Relazione di Eulero***.

La relazione di Eulero collega i numeri F, S e V delle facce, degli spigoli e dei vertici di un poliedro semplice nel modo seguente:

$$F + V - S = 2.$$

Ad esempio:

- per il cubo: $F = 6$, $V = 8$, $S = 12$, da cui $F - S + V = 6 - 12 + 8 = 2$.
- per il tetraedro: $F = 4$, $V = 4$, $S = 6$, da cui $F - S + V = 4 - 6 + 4 = 2$.
- per il prisma a base pentagonale: $F = 7$, $V = 10$, $S = 15$, da cui $F - S + V = 7 - 15 + 10 = 2$.
- per il dodecaedro: $F = 12$, $V = 20$, $S = 30$, da cui $F - S + V = 12 - 30 + 20 = 2$.

Non è possibile costruire un poliedro convesso i cui vertici hanno valenza 3 e le cui facce sono tutte esagonali. Il pallone da calcio usato normalmente è un icosaedro troncato, le cui facce sono 20 esagoni e 12 pentagoni.

La relazione di Eulero può essere usata per dimostrare ad esempio che non è possibile costruire un pallone da calcio simile a quello in figura ma con facce tutte esagonali.

La relazione di Eulero può non valere nei poliedri non semplici. Ad esempio, in un poliedro a forma di toro come quello mostrato in figura vale la relazione $V - S + F = 0$. La quantità $\chi = V - S + F$ dipende effettivamente soltanto dalla topologia del poliedro ed è chiamata caratteristica di Eulero-Poincaré: si tratta di una quantità molto importante in topologia.

Simmetrie

I poliedri più studiati sono quelli che presentano numerose simmetrie. Una simmetria di un poliedro è una isometria dello spazio che trasforma il poliedro in se stesso. Le simmetrie di un poliedro formano un gruppo, detto gruppo di simmetria.

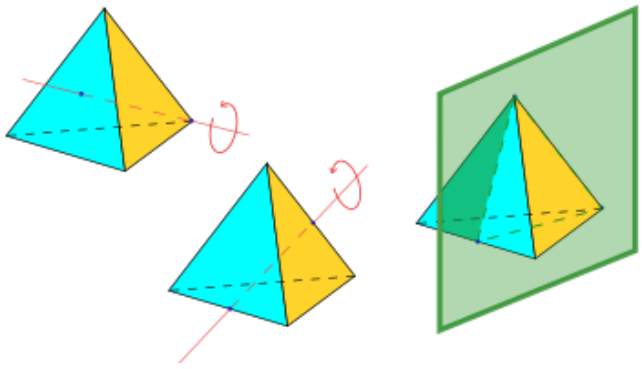
Tipi di simmetria

Esistono due classi di isometria dello spazio euclideo tridimensionale: quelle che preservano l'orientazione dello spazio (trasformano cioè una mano destra in una mano destra) e quelle che la invertono (trasformano una mano destra in una sinistra). La stessa classificazione si riflette sulle simmetrie di un poliedro.

- Una simmetria del poliedro che preserva l'orientazione deve necessariamente essere una rotazione intorno ad un asse[5] indicata con la lettera c_n, dove *n* è il numero di rotazioni "unitarie" che riportano il poliedro nella configurazione di partenza (e $\frac{2\pi}{n} = \frac{360^\circ}{n}$ è l'angolo corrispondente).
- Una simmetria che non preserva l'orientazione può essere:
  - l'inversione rispetto a un punto, detto *centro di simmetria*, indicata con la lettera i;
  - una riflessione lungo un piano, detto *piano di simmetria* σ;

- la composizione di una riflessione lungo un piano e di una rotazione con asse perpendicolare al piano (*rotazione impropria* s_n).

Ad esempio, il tetraedro ha 7 assi di simmetria: quattro per ogni vertice e tre per ogni coppia di spigoli opposti (si veda la figura). Ha inoltre 6 piani di simmetria (uno per ogni spigolo). Le simmetrie sono però in realtà 24. Di queste, 12 mantengono l'orientazione, e sono: l'identità, 2 rotazioni intorno ad ogni asse del primo tipo (di 120° e 240°) e una rotazione di 180° intorno ad un asse del secondo tipo (quindi $1 + 2 \times 4 + 3 = 12$). Ci sono inoltre 12 simmetrie che non mantengono l'orientazione: 6 sono riflessioni lungo piani come in figura, e altre 6 sono composizioni di riflessioni e rotazioni.



Simmetrie del tetraedro: rotazioni intorno ad un asse o riflessione rispetto ad un piano.

Piani, assi e centro di simmetria

Piani e assi di simmetria sono il risultato della presenza di simmetrie riflessive e rotatorie. L'intersezione di tutti gli assi e di tutti i piani di simmetria può essere un piano, una retta, un punto, o vuota. L'intersezione può essere vuota solo se non vi sono simmetrie.[6] Se l'intersezione è un punto, questo è chiamato *centro* del poliedro. Se l'intersezione è una retta, questa è l'*asse* del poliedro.

Ad esempio, il tetraedro ed il cubo hanno un centro. Una piramide quadrata non ha un centro,[7] ma ha un asse.

Chiralità

Il cubo simo è chirale; non è cioè equivalente...

Un poliedro è *chirale* se non è equivalente alla sua immagine riflessa. Più precisamente, un poliedro è chirale se tutte le sue simmetrie sono rotatorie: non ha cioè simmetrie che invertono l'orientazione. Più concretamente, un poliedro chirale si comporta come una mano: si presenta in due forme (una "sinistra" e una "destra") che sono una lo specchio dell'altra.

...alla sua immagine riflessa.

Regolarità

Una simmetria sposta un vertice su un vertice, che può essere uguale o diverso da quello di partenza. Analogamente, sposta uno spigolo su uno spigolo, e una faccia su una faccia. La simmetria determina quindi una permutazione dei vertici, degli spigoli e delle facce.

Le simmetrie di un poliedro inducono una relazione di equivalenza sull'insieme dei suoi vertici (e analogamente sull'insieme dei suoi spigoli e delle sue facce): due vertici (o spigoli o facce) sono *equivalenti* se esiste una simmetria che sposta il primo nel secondo.[8] Due vertici (o spigoli o facce) equivalenti devono avere necessariamente lo stesso aspetto: ad esempio, due vertici equivalenti devono avere lo stesso tipo di cuspide (in particolare, la stessa valenza), due spigoli la stessa lunghezza e lo stesso angolo diedrale e due facce equivalenti devono essere congruenti. Tutte queste condizioni necessarie non sono generalmente sufficienti: possono esistere facce congruenti non equivalenti, spigoli della stessa lunghezza e con lo stesso angolo diedrale non equivalenti, ecc.

Se i vertici di un poliedro sono tutti equivalenti, questo è detto *regolare sui vertici*. Analogamente, se sono equivalenti tutti gli spigoli o tutte le facce, è detto *regolare sugli spigoli* o *sulle facce*. I termini *omogeneo* e *transitivo* possono essere usati come sinonimo di *regolare*.[9]

Un poliedro che è regolare sui vertici, sugli spigoli e sulle facce è detto *regolare*. Esistono solo 5 poliedri semplici regolari: questi sono i solidi platonici.

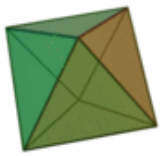
Il dodecaedro rombico è regolare su spigoli e facce, ma non sui vertici: alcuni hanno valenza 3 ed altri valenza 4.

Gruppo di simmetria

Le simmetrie di un poliedro formano un gruppo con l'operazione di composizione. Questo gruppo è sempre un gruppo finito.

Ad esempio, il gruppo di simmetria del tetraedro è il gruppo di permutazioni S_4 di 4 elementi: infatti ogni permutazione dei 4 vertici è realizzata esattamente da una simmetria. Le simmetrie sono effettivamente 4! = 24.

Le simmetrie che preservano l'orientazione formano un sottogruppo, detto *gruppo delle rotazioni*. Questo può coincidere con tutto il gruppo (se il poliedro è chirale) oppure avere indice 2 (se non è chirale). Il tetraedro non è chirale: il gruppo delle rotazioni è il gruppo alternante A_4, avente 12 elementi.

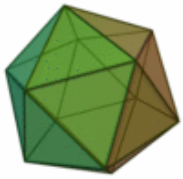


L'ottaedro ha 24 simmetrie rotatorie: queste formano il gruppo S_4.

Nonostante la grande varietà di poliedri esistenti, vi sono poche classi di gruppi di simmetrie possibili. Ad esempio, gli unici gruppi che possono essere gruppi di rotazioni di qualche poliedro sono

$$C_n, D_n, A_4, S_4, A_5$$

dove C_n è il gruppo ciclico di ordine n, D_n è il gruppo diedrale di ordine $2n$, S_n è il gruppo simmetrico di ordine $n!$ e A_n è il gruppo alternante di ordine $n!/2$. I gruppi C_n e D_n sono ottenuti anche come gruppi di rotazione e di simmetria di un poligono regolare con n lati: sono quindi gruppi che si ottengono anche nel piano, e la loro presenza non è quindi sorprendente.[10]



L'icosaedro ha 60 simmetrie rotatorie: queste formano il gruppo A_5.

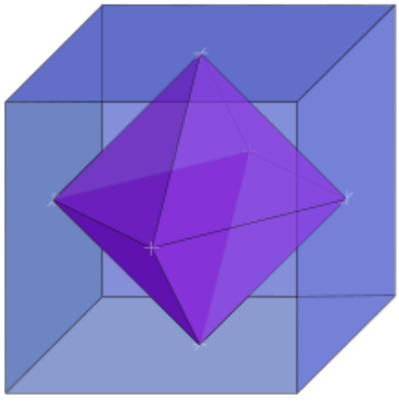
I gruppi A_4, S_4 e A_5 sono quindi gli unici gruppi di rotazioni essenzialmente tridimensionali. Sono i gruppi di rotazioni dei 5 solidi platonici: A_4 per il tetraedro, S_4 per cubo e ottaedro, A_5 per icosaedro e dodecaedro. I solidi platonici giocano qui (come in molti altri contesti) un ruolo centrale.

Dualità

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Poliedro duale***.

Due poliedri P e Q sono *duali* se hanno i ruoli di vertici e facce scambiati. Più precisamente, ad ogni vertice, spigolo o faccia di P corrisponde rispettivamente una faccia, spigolo o vertice di Q, in modo che siano preservate adiacenze e incidenze. Ad esempio, se un vertice di P è adiacente ad uno spigolo di P, la corrispondente faccia di Q è adiacente al corrispondente spigolo di Q.

In particolare, le terne di numeri (V, S, F) dei due poliedri sono l'una l'opposta dall'altra. Ad esempio, il cubo, avente $(V, S, F) = (8, 12, 6)$ è duale dell'ottaedro, avente $(V, S, F) = (6, 12, 8)$. In molti casi (come questo) la dualità è realizzata in modo che i vertici di Q siano punti interni delle corrispondenti facce di P (si veda un esempio in figura).



Dualità fra il cubo e l'ottaedro.

Ogni poliedro convesso ha un poliedro duale, che può essere definito come il risultato di una inversione rispetto ad una sfera. Quando il poliedro ha un centro, è naturale prendere come sfera una sfera centrata in questo punto. La costruzione del duale di poliedri non convessi è più problematica.

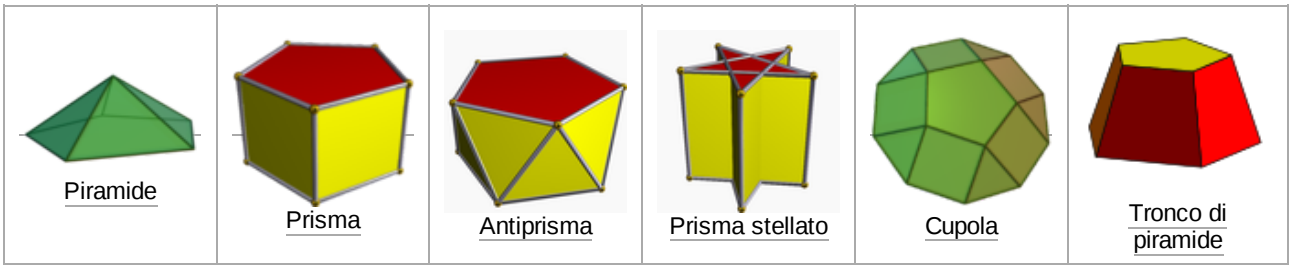
Classi di poliedri

Prismatoidi

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Prismatoide****.*

Un prismatoide è un poliedro i cui vertici giacciono in due piani paralleli. Tranne rare eccezioni,[11] i prismatoidi hanno generalmente al più un asse di simmetria (ortogonale ai piani paralleli), ed il loro gruppo di simmetrie è ciclico (C_n) o diedrale (D_n), simile cioè al gruppo di simmetrie di un poligono nel piano.

Esistono varie famiglie infinite di prismatoidi. Qui sono elencate le più usate.

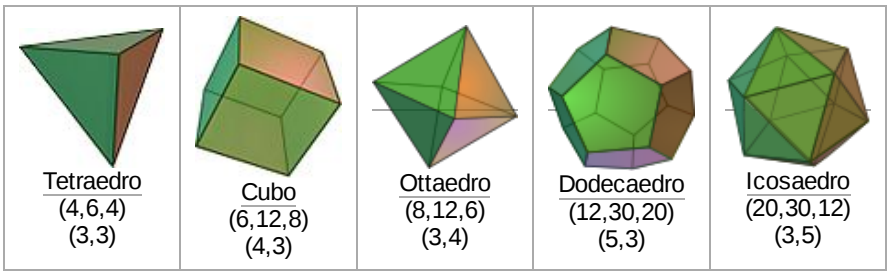


- Una piramide ha una faccia detta *base* ed un altro vertice collegato a questa tramite facce triangolari.
- Un prisma ha due facce congruenti che giacciono su due piani paralleli, collegate con parallelogrammi laterali.
- Un antiprisma è simile al prisma: ha due facce congruenti su due piani paralleli, collegate però con triangoli.
- Un prisma stellato o un antiprisma stellato è definito analogamente: le due facce sono però poligoni stellati.
- Una cupola ha due facce non congruenti, collegate da rettangoli e triangoli.
- Un tronco di piramide ha due facce non congruenti ma simili, collegate da trapezi.

Solidi platonici

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Solido platonico****.*

Esistono esattamente 5 poliedri semplici regolari sulle facce, sugli spigoli e sui vertici. Questi sono i solidi platonici. Questi poliedri sono detti anche *regolari*.



La tabella indica per ogni solido platonico la terna (F, S, V) ed una coppia (N, M), con N pari al numero di lati di ogni faccia e M pari al numero di spigoli su ogni vertice (cioè la sua valenza). Cubo e ottaedro sono duali, dodecaedro e icosaedro sono duali. Il tetraedro è duale a se stesso (la dualità inverte le terne e le coppie di numeri nelle tabelle).

Il centro di ogni solido platonico è anche centro di una sfera inscritta (interna e tangente a tutte le facce) e di una sfera circoscritta (esterna e contenente tutti i vertici).

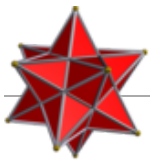
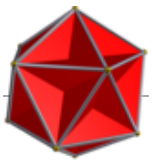
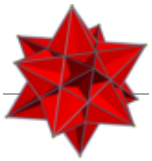
I poliedri, per essere *regolari*, oltre ad avere come facce poligoni regolari tutti uguali, devono anche avere tutti gli spigoli e i vertici equivalenti.

I solidi platonici giocano un ruolo centrale nella geometria solida: sono i solidi che presentano la maggiore regolarità possibile e il maggior numero di simmetrie. I loro gruppi di simmetrie hanno collegamenti con le sezioni più disparate della matematica. Hanno inoltre un posto di rilievo nella storia del pensiero greco, arabo e rinascimentale. Platone, nel Timeo, associò ad ognuno di essi un elemento: al tetraedro il fuoco, al cubo la terra, all'ottaedro l'aria, all'icosaedro l'acqua, mentre ritenne che il dodecaedro fosse la forma dell'universo.

Poliedri di Keplero-Poinsot

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Poliedro di Keplero-Poinsot****.*

Oltre ai 5 poliedri platonici, esistono altri 4 poliedri regolari non semplici. Le facce di questi poliedri si intersecano vicendevolmente: due di questi, scoperti da Keplero, hanno come facce poligoni regolari stellati; altri due, scoperti da Louis Poinsot, hanno facce regolari non stellate, ma comunque intrecciate.

			
Piccolo dodecaedro stellato (12,30,12) (5,5)	Grande dodecaedro (12,30,12) (5,5)	Grande dodecaedro stellato (12,30,20) (5,3)	Grande icosaedro (20,30,12) (3,5)

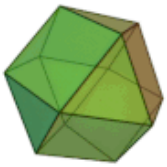
I due poliedri stellati hanno come facce 12 pentagoni stellati (pentagrammi). I valori (F, S, V) e (N, M) hanno lo stesso significato descritto precedentemente. I primi due poliedri sono uno duale dell'altro, come lo sono anche gli ultimi due.

Poliedri uniformi

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Poliedro uniforme****.*

Un poliedro uniforme è un poliedro

- regolare sui vertici,
- le cui facce sono poligoni regolari.



Il cubottaedro è un solido archimedeo.

Il poliedro non è necessariamente semplice. I poliedri uniformi sono catalogati nel modo seguente:

- Famiglie infinite di prismatoidi: prismi, antiprismi, prismi stellati e antiprismi stellati regolari.
- I 5 solidi platonici e i 4 solidi di Keplero-Poinsot, che sono regolari anche su spigoli e facce.
- 13 altri solidi convessi, detti solidi archimedei.
- 54 altri solidi non convessi (con facce convesse o stellate).

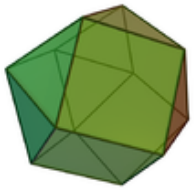
I poliedri duali dei poliedri uniformi sono regolari sulle facce e hanno cuspidi regolari. Tra questi, i 13 solidi duali dei solidi archimedei sono detti poliedri di Catalan dal nome del matematico belga Eugène Charles Catalan.

Solidi di Johnson

> 🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio: **Solido di Johnson**.*

Un solido di Johnson è un poliedro convesso

- non regolare sui vertici,
- le cui facce sono poligoni regolari.



L'ortobicupola triangolare è un solido di Johnson.

In altre parole, i solidi di Johnson sono i solidi convessi con facce regolari che non sono uniformi.

I solidi di Johnson sono 92, e vengono generalmente indicati con una sigla che va da J_1 fino a J_{92}.

I solidi convessi aventi facce regolari sono quindi: prismi e antiprismi regolari (in quantità infinita), i solidi platonici (5), i solidi archimedei (13) e quelli di Johnson (92).

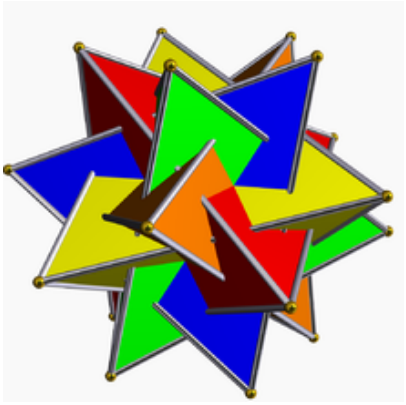
Poliedri composti

> 🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio: **Poliedro composto**.*

Un poliedro composto è un poliedro ottenuto come unione di più poliedri distinti aventi lo stesso centro. Un poliedro di questo tipo generalmente non è convesso.

Ad esempio, la stella octangula mostrata precedentemente può essere descritta come poliedro composto, formato da due tetraedri, aventi lo stesso centro ma posizionati in modo differente.

I poliedri composti più importanti sono quelli che presentano molte simmetrie. Ad esempio il poliedro mostrato accanto in figura, denominato cinque tetraedri nel dodecaedro, è effettivamente l'unione di 5 tetraedri concentrici: ha $5 \times 4 = 20$ vertici, i quali sono anche i vertici di un dodecaedro regolare.



Questo poliedro è unione di cinque tetraedri!

Operazioni con i poliedri

Alcune operazioni permettono di trasformare un poliedro in un altro, o di affiancare più poliedri in modo da ricoprire lo spazio.

Troncamento

Il *troncamento* di un vertice v di un poliedro consiste nell'eliminazione di una porzione di poliedro (una cuspide) tramite un taglio vicino a v. Il pezzo da rimuovere è una piramide con vertice in v e base determinata dal piano lungo cui viene fatto il taglio. La base è un poligono con n lati, dove n è la valenza di v.

Il nuovo poliedro ha una faccia in più del precedente. Troncando un vertice alla volta, è quindi possibile, partendo dal tetraedro, costruire poliedri con un numero arbitrario 4, 5, 6... di facce.

Molti solidi archimedei sono ottenuti troncando opportunamente tutti i vertici di un solido platonico. Una troncatura variabile può essere usata in alcuni casi per passare da un poliedro al suo duale, come in questa sequenza che collega il cubo all'ottaedro:

Cubo

Cubo troncato

Cubottaedro

Ottaedro troncato

Ottaedro

Stellazione

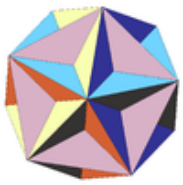
Lo stesso argomento in dettaglio: ***Stellazione***.

La *stellazione* è un'operazione definita da Keplero nel 1619: consiste nell'estendere alcune facce del poliedro fino ad un punto in cui queste si incontrano nuovamente. Con questa operazione Keplero costruì, partendo dal dodecaedro regolare, due dei quattro poliedri noti oggi come solidi di Keplero-Poinsot. La stella octangula è una stellazione dell'ottaedro regolare.

Qui sotto sono elencate alcune stellazioni: una dell'ottaedro regolare (la stella octangula), tre del dodecaedro regolare (le prime due sono i solidi di Keplero), e una dell'icosaedro.

Ottaedro

Dodecaedro (1)


Dodecaedro (2)

Dodecaedro (3)

Icosaedro

Tassellazione

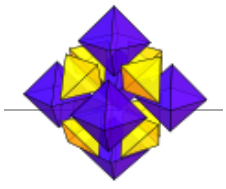
Lo stesso argomento in dettaglio: ***Tassellazione dello spazio***.

Alcuni poliedri possono essere usati come mattoni per riempire lo spazio senza lasciare buchi, similmente a quanto accade nelle arnie: una tale operazione è detta tassellazione dello spazio (o *pavimentazione* dello spazio). I poliedri in una tassellazione sono adiacenti lungo le loro facce. Fra i solidi platonici, l'unico in grado di tassellare lo spazio è il cubo; fra i solidi archimedei, vi sono il dodecaedro rombico e l'ottaedro troncato. Ottaedri e tetraedri regolari possono essere usati a coppie per tassellare lo spazio.

Cubi

Dodecaedri rombici

Ottaedri troncati


Ottaedri e tetraedri

Poliedri nel mondo reale

Naturali

Minerali

Molti minerali cristallizzano con una forma, detta *abito*, che corrisponde ad un poliedro. La pirite si può presentare con tre abiti diversi: con cristalli cubici, ottaedrici o aventi la forma di un dodecaedro non regolare (detto *pentadodecaedro* o *piritoedro*). Nessun minerale ha però la forma di un icosaedro o dodecaedro *regolare*.

Cubo

Ottaedro

Dodecaedro

La leucite può avere la forma di un icositetraedro trapezoidale (un solido di Catalan). Il piropo può avere la forma di un dodecaedro rombico (un poliedro di Catalan) e l'aragonite la forma di un prisma esagonale.

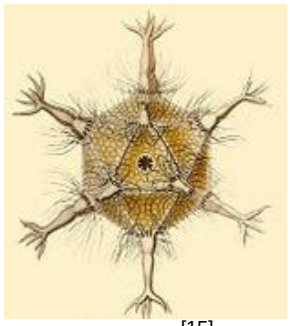
Icositetraedro trapezoidale

Dodecaedro rombico

Prisma esagonale

Radiolari

Molti organismi microscopici hanno forme o simmetrie poliedrali. Tra questi, i radiolari possono avere la forma di un icosaedro regolare o di un geode. Nella forma geodale, è possibile verificare una delle conseguenze della relazione di Eulero descritta sopra: non è possibile costruire un solido i cui vertici hanno valenza 3 e le cui facce sono tutte esagonali. Nella figura sono infatti presenti alcuni pentagoni.[12] Le regolari geometrie degli scheletri di questi microorganismi hanno affascinato dalla fine del XIX secolo molti naturalisti, tra cui Ernst Haeckel[13] e Thompson D'Arcy,[14] che hanno anche cercato una interpretazione integrata fra biologia e geometria sul significato di queste strutture:


Icosaedro[15]

Geode

Artificiali

Piramidi

Il solido artificiale più antico di cui è rimasta traccia è sicuramente la piramide.

Piramidi egizie

Piramide del Louvre

Dadi

Il dado da gioco classico ha la forma di un cubo. Alcuni giochi di ruolo fanno però uso di tutti e 5 i solidi platonici: la regolarità del solido infatti garantisce che ogni faccia abbia la stessa probabilità di uscire dopo un lancio (naturalmente la densità del solido dev'essere uniforme).

I solidi platonici e due trapezoedri usati come dadi.

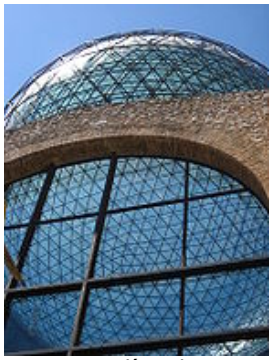
Per mantenere la stessa probabilità è sufficiente che il solido sia regolare sulle facce: per questo motivo vengono usati anche i trapezoedri. Ad esempio, due trapezoedri con 10 facce come in figura usati simultaneamente permettono di sorteggiare un numero da 0 a 99.

Cupole geodetiche

Una cupola geodetica è un solido con molte facce, la cui forma è molto simile a quella di una sfera (o di una porzione di questa). Come nei radiolari mostrati sopra, nelle cupole geodetiche è spesso facile verificare gli effetti della relazione di Eulero.

Disneyworld

Montréal



Museo Dalí a Figueres

Note

1. ^ Il problema è affrontato da un punto di vista storico e matematico in (EN) B. Grünbaum, *Are your polyhedra the same as my polyhedra?* (PDF), in *Discrete and comput. geom: the Goodman-Pollack festschrift*, Aronov et al. Springer, 2003, pp. 461-488. URL consultato l'11 febbraio 2007 (archiviato dall'url originale il 3 agosto 2016).

2. ^ Un tale segmento talora viene detto *diametro del poliedro*; altri definiscono diametro di un poliedro un qualsiasi segmento aventi gli estremi su vertici, spigoli o facce, e gli altri punti all'interno del solido.
3. ^ Uno sviluppo è infatti determinato dall'albero massimale nel grafo poliedrale formato dagli spigoli che vengono incollati alla chiusura. Alberi massimali diversi possono dare luogo a sviluppi diversi.
4. ^ Questo fatto, benché intuitivo, non è di banale dimostrazione: si tratta dell'analogo tridimensionale del teorema della curva di Jordan. Il fatto che la superficie sia un'unione di poligoni rende comunque più facile la dimostrazione: senza questa ipotesi si possono creare superfici come la sfera cornuta di Alexander, che si comportano in modo più bizzarro.
5. ^ Questo fatto non banale può essere dimostrato con l'ausilio dell'algebra lineare: innanzitutto, il fatto che il poliedro sia un insieme limitato, implica che devono essere escluse isometrie come le traslazioni, e che c'è un punto fisso. Fissata l'origine in questo punto, lo spazio diventa uno spazio vettoriale e (fissata una base) una isometria è descritta da una matrice ortogonale. Usando il polinomio caratteristico e gli autovalori si mostra che effettivamente questa è una rotazione intorno ad un asse.
6. ^ La dimostrazione di quest'altro fatto non banale sfrutta la proprietà che un poliedro è un insieme limitato. Questo fatto implica, ad esempio, che più assi di simmetria si incontrano sempre in un punto.
7. ^ La piramide quadrata ha un asse di simmetria rotatoria (passante per il vertice e ortogonale alla base) e alcuni piani di riflessione contenenti questo asse. L'intersezione di questi oggetti è una retta e non un punto.
8. ^ Oppure il secondo nel primo: la cosa non fa differenza, basta sostituire una simmetria con la sua simmetria inversa.
9. ^ Il termine *omogeneo* si riferisce al fatto che i vertici formano con le simmetrie uno spazio omogeneo, mentre il termine *transitivo* si riferisce al fatto che l'azione del gruppo di simmetria è transitiva: entrambe queste nozioni sono equivalenti al fatto che i vertici sono tutti equivalenti.
10. ^ Nello spazio, questi sono i gruppi delle rotazioni di piramidi e prismi (e più generalmente dei prismatoidi).
11. ^ Ad esempio il tetraedro e il cubo.
12. ^ Per la formula di Eulero, questi devono essere necessariamente 12, come nel pallone da calcio.
13. ^ Ernst Haeckel, *Kunstformen der Natur* 1904: oltre 100 illustrazioni a colori con accurata descrizione di animali e creature marine.
14. ^ D'Arcy Wentworth Thompson, *On Growth and Form* (1917) 2nd ed. 1942. ISBN 0-486-67135-6.
15. ^ Tavola di Haeckel: Circogonia Icosahedra, "Kunstformen der Natur", 1904

Bibliografia

- Maria Dedò, *Forme, simmetria e topologia*, Bologna, Decibel & Zanichelli, 1999, ISBN 88-08-09615-7.
- Gino Loria, *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva*, Milano, Hoepli, 1912.
- Francesco Severi, *Cenno sulla teoria e costruzione degli orologi solari, poliedri e loro rappresentazione*, Padova, La Litotipo, 1915.
- Nicoletta Sala e Gabriele Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, 2ª ed., FrancoAngeli, 2008.
- (**EN**) P. Cromwell, *Polyhedra*, 1997.
- (**EN**) H.M. Cundy e A.P. Rollett, *Mathematical models*, 3ª ed., 1981.
- (**EN**) H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3ª ed., 1973.

Voci correlate

- Solido platonico
- Poliedro di Keplero-Poinsot
- Gruppo di simmetria
- Sviluppo piano di un poliedro
- Angolo solido
- Poligono

- Politopo

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**poliedro**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **poliedro (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Polyhedra?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Poliedro*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Poliedro*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *Virtual Polyhedra*, su *georgehart.com*. URL consultato il 7 marzo 2008. Sito dedicato ai poliedri con una ampia bibliografia (http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/references.html).
- (EN) *The puzzling world of polyhedral dissections*, su *johnrausch.com*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Libro dedicato ai puzzle tridimensionali.
- (EN) *Guy's polyhedra pages*, su *steelpillow.com*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Sito orientato alla ricerca attuale sui poliedri.
- (EN) *Stella*, su *software3d.com*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Programma dedicato alla visualizzazione di poliedri.
- (EN) *The Uniform Polyhedra*, su *mathconsult.ch*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Sito dedicato ai poliedri uniformi.
- (EN) *Paper Models of Polyhedra*, su *korthalsaltes.com*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Sviluppi di poliedri in formato PDF stampabili.
- (EN) *Interactive 3D polyhedra*, su *ibiblio.org*. URL consultato l'11 febbraio 2008 (archiviato dall'url originale il 3 aprile 2005). Visualizzazione tridimensionale con trascinamento in Java.
- (FR) *Polyèdres*, su *xavier.hubaut.info*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Visualizzazione tridimensionale con trascinamento.
- (FR) *Polygones, polyèdres et polytopes*, su *mathcurve.com*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Informazioni metriche dettagliate su molti poliedri.
- (DE, EN, FR) *Polyedergarten*, su *polyedergarten.de*. URL consultato l'11 febbraio 2008. Modelli di carta.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 22328 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=22328) · LCCN (EN) sh85104647 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85104647) · GND (DE) 4132101-7 (https://d-nb.info/gnd/4132101-7) · BNF (FR) cb119796991 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb119796991) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb119796991) · J9U (EN, HE) 987007563259005171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007563259005171) · NDL (EN, JA) 01136723 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/01136723)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poliedro&oldid=130915655"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'11 dic 2022 alle 08:37.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

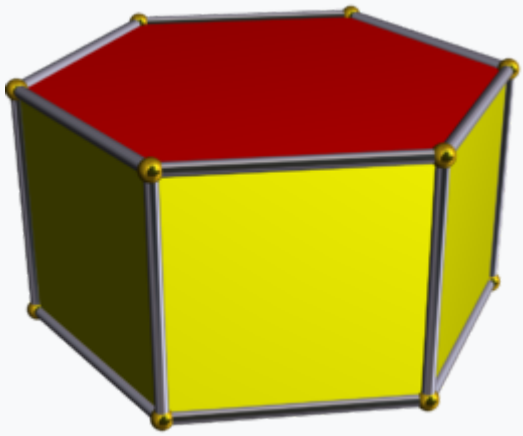
Prisma

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Prisma (disambigua)**.*

Il **prisma** in geometria solida è un poliedro le cui basi sono due poligoni congruenti di **n** lati posti su piani paralleli e connessi da un ciclo di parallelogrammi (le "facce laterali").

Prisma



Forma facce	2 *n*-goni, *n* parallelogrammi
Nº facce	2 + *n*
Nº spigoli	3*n*
Nº vertici	2*n*
Valenze vertici	3
Duale	Dipiramide
Proprietà	convesso

Indice

- **Nomenclatura**
  - Le basi
  - Prismi retti e obliqui
  - Parallelepipedi
  - Prismi regolari
  - Grafo
- **Proprietà**
  - Dualità
  - Volume
  - Simmetrie
- **Voci correlate**
- **Altri progetti**
- **Collegamenti esterni**

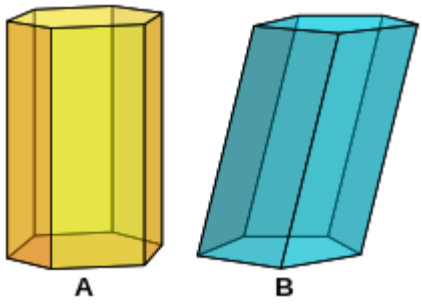
Nomenclatura

Le basi

Se il poligono che forma le basi è un particolare poligono, ad esempio un triangolo, quadrato, pentagono, etc. si parla rispettivamente di "prisma triangolare", "prisma quadrato", '"pentagonale", etc. In generale, si parla di "prisma n-gonale".

Prismi retti e obliqui

Se le facce laterali sono tutte dei rettangoli il poliedro è un "prisma retto": in questo caso infatti le facce laterali formano degli angoli retti con entrambe le basi. In caso contrario si parla di "prisma obliquo".



Prisma retto (A) e obliquo (B)

Parallelepipedi

Un prisma che ha tutte le facce a forma di parallelogramma è un parallelepipedo. Si tratta, quindi, di un prisma le cui basi sono parallelogrammi.

Prismi regolari

Un "prisma regolare" è un prisma retto la cui base è un poligono regolare.

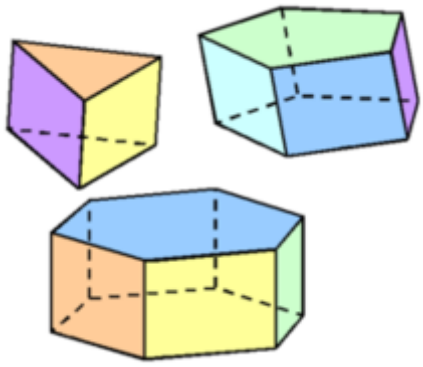
Grafo

Il grafo poliedrale di un prisma viene detto, prevedibilmente, "grafo prisma".

Proprietà

Dualità

Il poliedro duale di un prisma è una bipiramide.


Prismi

Volume

Il volume di un prisma è dato dal prodotto dell'area di una delle sue basi per la distanza tra i piani (paralleli) ai quali appartengono. Se il prisma è retto, questa distanza è pari alla lunghezza di uno spigolo verticale (altrimenti no).

Simmetrie

Un prisma regolare con $n \neq 4$ lati ha $4n$ simmetrie. Per $n = 4$ il prisma regolare è in realtà un cubo e le simmetrie sono di più (48), perché è possibile scambiare una faccia laterale con una base.

Più precisamente, il gruppo di simmetria di un prisma regolare con $n \neq 4$ lati è il prodotto diretto $D_{2n} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ del gruppo diedrale di ordine $2n$ con il gruppo ciclico di ordine 2. Il gruppo diedrale rappresenta infatti tutte le simmetrie che preservano ciascuna base, ed è quindi isomorfo al gruppo D_{2n} di simmetrie di un n-gono regolare, mentre il secondo fattore rappresenta l'isometria che scambia le due basi.

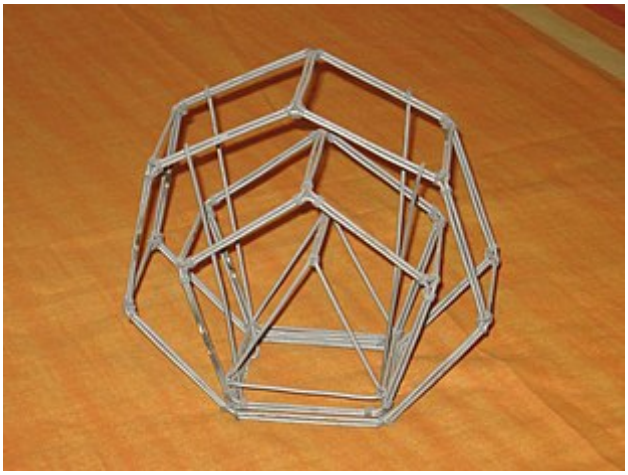
Voci correlate

- Antiprisma

- Piramide

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**prisma**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **prisma (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Prisms_(geometry)?uselang=it)**



Modelli di prisma triangolare, pentagonale ed eptagonale

Collegamenti esterni

- (EN) Prism (http://mathworld.wolfram.com/Prism.html) in MathWorld
- (EN) *Modelli cartacei di prismi e antiprismi*, su *software3d.com*.
- (EN) The Uniform Polyhedra (http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/) di Roman Mäder
- (EN) *Virtual Reality Polyhedra*, su *georgehart.com*.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Prisma&oldid=132143445"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 20 feb 2023 alle 12:37.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Piramide (geometria)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In geometria una **piramide** (dal greco: πυραμίς, *pyramís*)[1][2] è un poliedro formato dal collegamento tra una base poligonale e un punto, chiamato apice. Ogni bordo e ogni apice di base formano un triangolo, chiamato *faccia laterale;* è un solido conico a base poligonale. Una piramide con una base di *n* lati ha *n* + 1 vertici, *n* + 1 facce e 2*n* spigoli; tutte le piramidi sono duali.

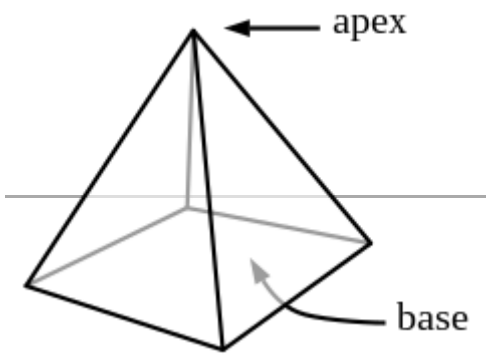
Una **piramide retta** ha il suo apice direttamente sopra il baricentro della sua base; le piramidi non dritte, sono chiamate **piramidi oblique**. Una **piramide regolare** ha una base poligonale regolare e di solito è implicita come una *piramide retta*[3][4].

Quando non è specificata, si presume solitamente che una piramide sia una *piramide quadrata regolare* (come le strutture piramidali fisiche). Una piramide a base triangolare è più spesso chiamata tetraedro.

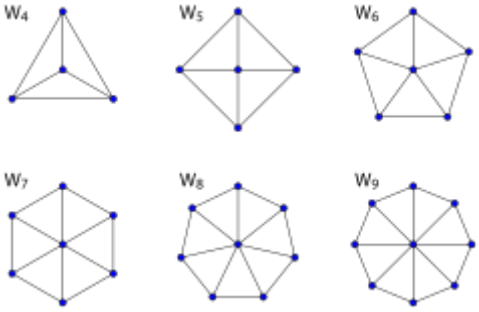
Tra le piramidi oblique, come i triangoli acuti e ottusi, una piramide può essere chiamata *acuta* se il suo apice è sopra l'interno della base e *ottusa* se il suo apice è sopra l'esterno della base. Una **piramide ad angolo retto** ha il suo apice sopra un bordo o vertice della base; in un tetraedro, questi qualificatori cambiano in base a quale faccia è considerata la base.

Le piramidi sono una classe dei prismatoidi e possono essere raddoppiate in bipiramidi, aggiungendo un secondo punto di offset sull'altro lato del piano di base.

Piramide a base regolare



Notazione del poliedro di Conway	Il *n*
Notazione di Schläfli	( ) ∨ {*n*}
Facce	*n* triangoli, 1 poligono
Bordi	2*n*
Vertici	*n* + 1
Gruppo di simmetria	C_{nv}, [1,*n*], (**nn*), ordine 2*n*
Gruppo ortogonale	C_n, $[1,n]^+$, (*nn*), ordine *n*
Poliedro duale	autoduale
Proprietà	convesso



L'*n*-scheletro della piramide, è un grafo a ruota.

Indice

Basi della piramide
- Piramidi con una base regolare
  - Piramidi a stella
- Piramidi con una base irregolare

Misure della piramide
- Area
- Volume

Note

Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Basi della piramide

Piramidi con una base regolare

Una piramide retta, a base regolare, possiede i lati del triangolo isoscele (con simmetria C_{nv} o [1,*n*]), di ordine 2*n*. Può essere contrassegnata da un simbolo Schläfli esteso ( )∨{*n*}, che rappresenta un punto, ( ), unito a un poligono regolare, {*n*}; un'operazione di unione crea un nuovo bordo tra tutte le coppie di vertici delle due figure unite[5].

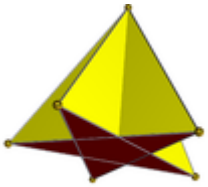
La **piramide trigonale** (o triangolare), con tutte le facce triangolari equilatere, diventa il tetraedro, uno dei solidi platonici; un caso di simmetria inferiore della **piramide triangolare** è C_{3v}, che ha una base di triangolo equilatero e tre lati di triangolo isoscele identici. Le piramidi quadrate e pentagonali possono anche essere composte da poligoni convessi regolari, i solidi di Johnson.

Se tutti gli spigoli di una piramide quadrata (o qualsiasi poliedro convesso) sono tangenti a una sfera (in modo che la posizione media dei punti tangenziali, sia al centro della sfera), allora, la piramide viene definita canonica e forma la metà di un ottaedro.

Le piramidi a base esagonale (o superiore), devono essere composte da triangoli isoscele. Una piramide esagonale con triangoli equilateri, sarebbe una figura completamente piatta mentre una ettagonale o superiore, non farebbe incontrare i triangoli.

Piramidi a stella

Le piramidi rette con basi poligonali a stella regolari, vengono definite **piramidi a stella** (ad esempio, la piramide pentagrammica ha una base a pentagramma e cinque lati triangolari che si intersecano).



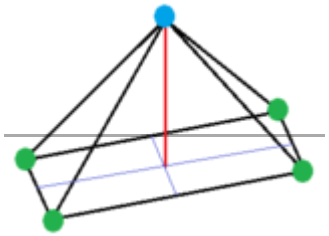
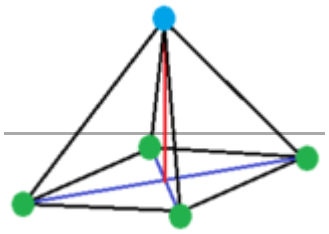
Piramidi con una base irregolare

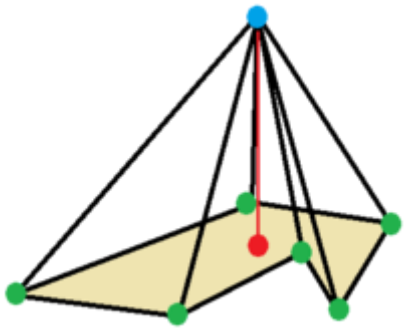
Una **piramide retta** può essere denominata ( )∨P: ( ) è il punto apice, ∨ è un operatore di unione e P è un poligono di base.

Un **tetraedro rettangolo isoscele** può essere scritto come ( )∨[( )∨{ }] (come unione di un punto a una base di triangolo isoscele); come [( )∨( )]∨{ } o { }∨{ } (come unione di due segmenti ortogonali) e come un disfenoide diagonale, contenente quattro facce triangolari isoscele. Ha la simmetria C_{1v} (da due diversi orientamenti base-apice) e C_{2v} nella sua piena simmetria.

Una **piramide rettangolare** retta (scritta come ()v[{ }×{ }]) e una **piramide rombica** (scritta come ( )v[{ }+{ }]) hanno entrambe la simmetria C_{2v}.

Piramidi rette

	
Piramide rettangolare	**Piramide rombica**



Esempio di una piramide generale, con l'apice sopra il baricentro di un poligono.

Misure della piramide

Area

L'area laterale per le piramidi rette è

$$A = \frac{pa}{2},$$

dove p è il perimetro di base e a è l'apotema della piramide.

L'area totale si calcola come: area di base + area laterale.

Volume

Il volume di una piramide generica è uguale ad un terzo del prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza. Detto V il volume, B l'area di base e h l'altezza, si calcola come:

$$V = \frac{Bh}{3}.$$

Cioè il volume della piramide è 1/3 di quello di un prisma con uguale altezza e base. Questa formula costituiva il teorema 7 del libro XII degli *Elementi* di Euclide ed era dimostrata con il metodo di esaustione (oggi diremmo con il calcolo infinitesimale).

Dimostrazione

Immaginando di sezionare i due solidi (la piramide ed il prisma con la stessa base e la stessa altezza) con piani paralleli alle basi a distanza infinitesima dx l'uno dall'altro, il volume si ottiene dalla somma integrale del prodotto dell'area di ogni sezione moltiplicata per lo spessore dx.

Indicando con x la distanza del piano di sezione dal vertice della piramide, è lecito affermare che l'area della sezione della piramide è proporzionale al quadrato di x, cioè:

$$S(x) = kx^2$$

e quindi

$$S(h) = B = kh^2$$

mentre l'area delle sezioni del prisma rimane sempre uguale a B. Calcolando gli integrali si ottiene:

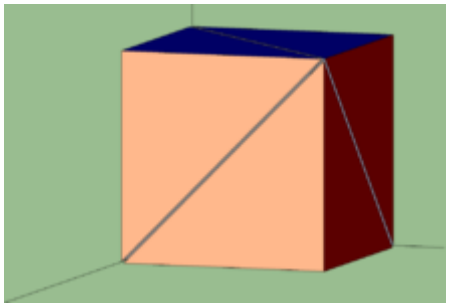
volume del prisma:

$$\int_0^h B\,dx = Bh = kh^3$$

volume della piramide:

$$\int_0^h kx^2\,dx = \frac{kh^3}{3} = \frac{Bh}{3}.$$

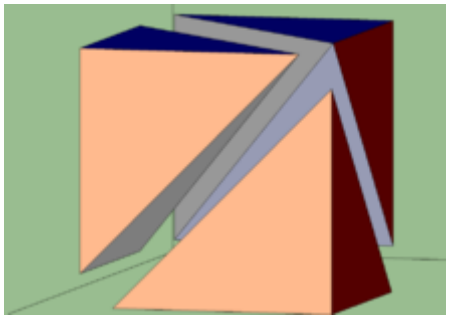
È possibile visualizzare una dimostrazione grafica del fatto che una piramide occupa un terzo del volume del prisma che la contiene. La cosa è particolarmente semplice partendo da un cubo e dividendolo in tre piramidi uguali, come si vede nella figura a lato.



Cubo diviso in tre piramidi uguali.

Da un vertice del cubo si tracciano le quattro diagonali che uniscono il vertice alle tre facce opposte.

Nel caso della figura, si vede il vertice in alto in primo piano che va a congiungersi con la faccia di fondo, la faccia sul retro e la faccia laterale. Si formano tre piramidi, ciascuna con base (quadrata) coincidente con una faccia (nascosta) del cubo, con due delle facce laterali (ciascuna coincidente con mezza faccia del cubo) costituite da triangoli rettangoli ortogonali alla base, e con le altre due facce (interne al cubo), delimitate dalle diagonali di faccia e dalla diagonale principale del cubo.



Cubo esploso. Volume di una piramide uguale ad un terzo del cubo.

L'altezza di ciascuna piramide coincide con un lato del cubo.

Si vede dunque che le tre piramidi sono esattamente uguali e insieme costituiscono il cubo di partenza.

Quindi hanno un volume pari ad 1/3 di quello del cubo.

Per estendere il risultato ad una piramide di forma qualsiasi, ed anche al volume del cono rispetto al cilindro che lo contiene, si può far ricorso al principio di Cavalieri.

Note

1. ^ *Piramide*, su *youmath.it*.
2. ^ The word meant "a kind of cake of roasted wheat-grains preserved in honey"; the Egyptian pyramids were named after its form (R. S. P. Beekes, *Etymological Dictionary of Greek*, Brill, 2009, p. 1261).
3. ^ William F. Kern, James R Bland,*Solid Mensuration with proofs*, 1938, p. 46

4. ^ Civil Engineers' Pocket Book: A Reference-book for Engineers (https://books.google.com/books?id=KC1RAAAAYAAJ&pg=PA248) Archiviato (https://web.archive.org/web/20180225234757/https://books.google.com/books?id=KC1RAAAAYAAJ&pg=PA248) il 25 febbraio 2018 in Internet Archive.
5. ^ N.W. Johnson: *Geometries and Transformations*, (2018) ISBN 978-1-107-10340-5 Chapter 11: *Finite symmetry groups*, 11.3 Pyramids, Prisms, and Antiprisms

Voci correlate

- Bipiramide
- Prisma
- Teorema delle sezioni parallele

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **piramide (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pyramids_(geometry)?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (EN) La geometria della piramide (http://mathworld.wolfram.com/Pyramid.html) in MathWorld

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38301 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38301) · LCCN (EN) sh85109294 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85109294) · BNF (FR) cb13331621k (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb13331621k) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb13331621k) · J9U (EN, HE) 987007550902105171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007550902105171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Piramide_(geometria)&oldid=133455507"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'11 mag 2023 alle 10:19.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

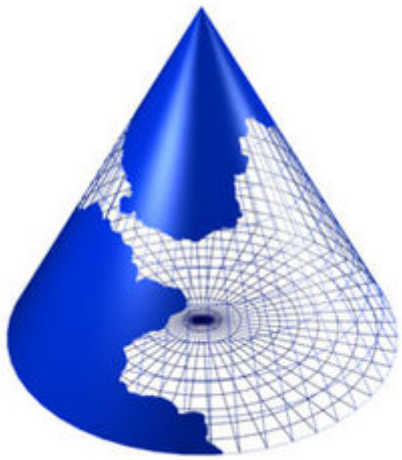
Cono

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Cono (disambigua)**.*

Questa voce o sezione sull'argomento matematica è ritenuta da controllare.
Motivo: *La rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un cateto genera un cono retto. Nel testo ci sono affermazioni riferite al cono generico che valgono, però, soltano per il cono retto. L'affermazione "Il cono obliquo è un cono" è da rivedere, perché - secondo la def. data all'inizio - equivarrebbe a dire che il cono obliquo è un cono retto.. Nella voce non sono definiti, ma sono usati, i termini asse e apotema. Nella figura del cono obliquo compare l'apotema: che cos'è l'apotema di un cono obliquo? Sempre in questa figura, l'asse non è l'asse di rotazione*

In geometria, il **cono** è un solido di rotazione che si ottiene ruotando un triangolo rettangolo intorno a uno dei suoi cateti. L'asse del cono è il cateto intorno a cui il solido è costruito; la base del cono è altresì il cerchio ottenuto dalla rotazione dell'altro cateto. Il vertice del cono è, infine, il punto dell'asse opposto a quello dell'intersezione con la sua base.



Cono

L'aggettivo che definisce gli oggetti di natura simile al cono è *conico*; da esso derivano anche le curve e le figure piane cosiddette *coniche*, ovvero risultanti dall'intersezione di un piano con un cono.

In matematica un cono può essere considerato come una piramide di base circolare, avente quindi numero infinito di facce oblique.

Indice

- **Nomenclatura**
- **Formule**
  - Volume
  - Area totale della superficie conica
  - Centro di massa
- **Note**
- **Voci correlate**
- **Altri progetti**
- **Collegamenti esterni**

Nomenclatura

Un cono il cui vertice è tagliato da un piano parallelo alla sua base è detto *tronco di cono*. Il termine cono viene talvolta esteso a figure più generali:

- Un *cono ellittico* è un cono che ha come sezione retta un'ellisse. Analogamente, un *cono circolare* ha un cerchio.
- Un *cono obliquo* è un cono che non ha l'asse ortogonale alla base. Un *cono retto* ha l'asse ortogonale. Con riferimento alla sezione retta, non esistono coni obliqui ma sono tutti retti.[1]
- Un cono *equilatero* è un cono che ha l'apotema equivalente al diametro di base.

Il termine "cono" senza ulteriori specificazioni indica generalmente un cono circolare retto.

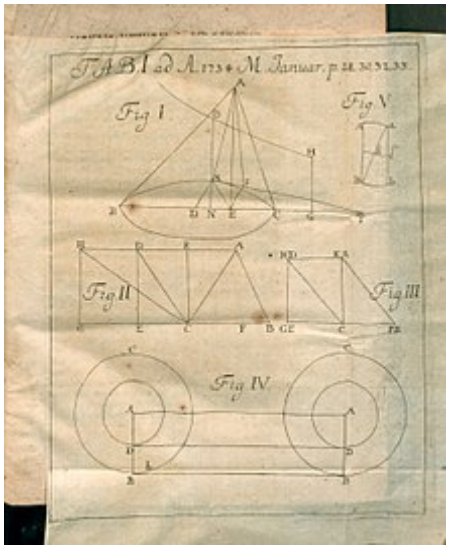


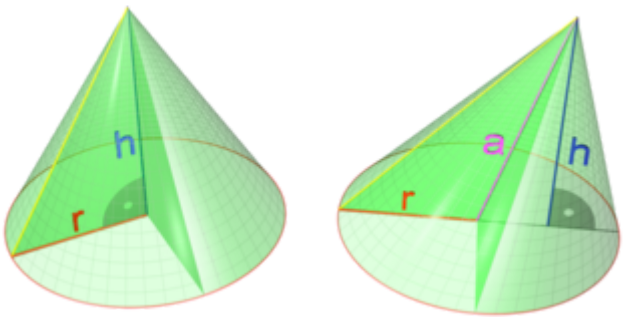
Illustrazione relativa a un articolo intitolato *Problemata mathematica...* pubblicato sugli Acta Eruditorum nel 1734

Formule

Volume

Il volume V di un cono con altezza h e con base di raggio r è $\frac{1}{3}$ del volume del cilindro che ha le stesse dimensioni. Quindi:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}.$$



Cono circolare retto (a sinistra) e cono circolare obliquo (a destra). Nel primo l'apotema è colorato in giallo. Nel secondo, l'altezza h non cade nel centro del cerchio di base, essendo l'asse a non ortogonale. L'apotema è colorato in giallo.

Se la base è ellittica di semiassi X e Y:

$$V = \frac{\pi \cdot XY \cdot h}{3}.$$

Si può calcolare il volume del cono per mezzo del calcolo integrale come il volume del solido ottenuto dalla rotazione di una retta $y = mx$ con coefficiente angolare positivo (per semplicità passante per l'origine degli assi) attorno all'asse delle ascisse. Si ha:

$$V = \int_0^h \pi (mx)^2 dx,$$

$$V = \frac{\pi \cdot m^2 \cdot h^3}{3}.$$

Essendo γ l'angolo acuto formato dalla retta $y = mx$ con l'asse delle ascisse, da considerazioni trigonometriche si ha che:

$$r = h \cdot \tan \gamma,$$

e poiché il coefficiente angolare m è uguale alla tangente goniometrica di γ, elevando al quadrato ambo i membri della precedente equazione si ha:

$$r^2 = m^2 h^2,$$

da cui si ottiene:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}.$$

Area totale della superficie conica

L'area totale S_t di una superficie conica è data dalla somma dell'area della base S_b con l'area laterale S_l:

$$S_t = S_b + S_l$$

dove:

$$S_b = \pi \cdot r^2$$

$$S_l = \pi \cdot r \cdot a$$

avendo definito l'apotema a del cono come

$$a = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Sostituendo nella formula, si ottiene infine:

$$S_t = \pi r(r + a)$$

- In generale, se il cono ha una forma qualunque (cono, piramide, ecc sono casi particolari) di vertice $V = (0, 0, h)$ e equazione polare di base $R = R(\vartheta)$, la formula per il calcolo della superficie laterale diviene:

$$S_l = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{[R(\vartheta)]^4 + [R(\vartheta)]^2 h^2 + [R'(\vartheta)]^2 h^2}\, d\vartheta$$

Centro di massa

Il centro di massa di un cono di densità uniforme è sull'asse, ad altezza $\frac{1}{4}h$, partendo dalla base.

Note

1. ^ Attualità della geometria descrittiva (https://books.google.jo/books?id=R8EN30Y2IscC&pg=PA316&lpg=PA316&dq=geometria+descrittiva+non+esistono+coni+obliqui&source=bl&ots=0pDvXOlEvG&sig=ACfU3U2OHnEy1qLcrFLjMp9Y3CbERw6vJw&hl=en&sa=X&ved=2ah

UKEwjaq6mei8DxAhUI_rsIHbqKDzMQ6AEwDXoECBAQAw#v=onepage&q=geometria%20descrittiva%20non%20esistono%20coni%20obliqui&f=false) - Riccardo Migliari, p 316

Voci correlate

- Piramide (geometria)
- Tronco di cono
- Teorema delle sezioni parallele

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**cono**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sul **cono (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cones?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (EN) *Volumen de un cono elíptico truncado*, su *matifutbol.com*.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 61293 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=61293) · GND (DE) 4163534-6 (https://d-nb.info/gnd/4163534-6)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Cono&oldid=131931869"

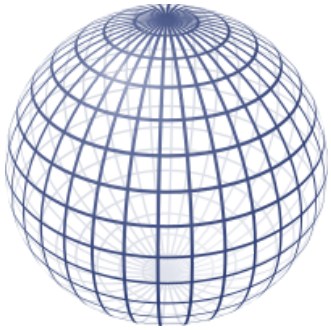
Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 7 feb 2023 alle 00:49.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Sfera

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Sfera (disambigua)**.*



La **sfera** (dal greco antico: σφαῖρα, *sphaîra*) è il solido geometrico costituito da tutti i punti che sono a distanza minore o uguale a una distanza fissata r, detta *raggio della sfera*, da un punto O detto *centro della sfera*.

L'insieme dei punti la cui distanza è eguale a r è detto *superficie sferica* di centro O e raggio r. È detta "semisfera" ciascuna delle metà di un solido sferico diviso in due da un piano passante per il centro o anche ciascuna delle due superfici di una sfera divisa da una sua circonferenza massima.

Indice

Rappresentazione analitica

Superficie
- Dimostrazione analitica in coordinate cartesiane
- Dimostrazione analitica in coordinate polari

Volume
- Dimostrazione analitica
- Dimostrazione tramite infinitesimi

Altre proprietà

Terminologia

Generalizzazioni ad altre dimensioni

Generalizzazioni in spazi metrici

Formule

Ingegneria

Filosofia

Note

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Rappresentazione analitica

In geometria cartesiana, una superficie sferica con centro (x_0, y_0, z_0) e di raggio r è rappresentata dall'insieme di punti (x, y, z) tali che

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

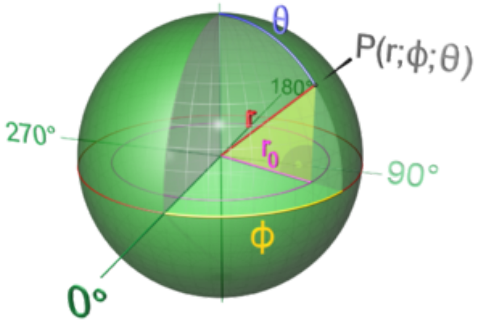
I punti della superficie sferica possono essere parametrizzati in coordinate sferiche nel modo seguente

$$\begin{cases} x = x_0 + r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = y_0 + r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = z_0 + r \cos\vartheta \end{cases}$$

dove ϑ e φ rappresentano la latitudine e la longitudine del punto, variando negli intervalli

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Ogni punto della superficie sferica è descritto da una sola coppia (ϑ, φ) di questo tipo, tranne i poli: la coppia $(0, \varphi)$ descrive sempre il polo nord, e (π, φ) sempre il polo sud (per qualsiasi valore di φ).



Alternativamente si può utilizzare l'equazione cartesiana della superficie sferica:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

con a, b, c, d, numeri reali tali che $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$. Dall'equazione cartesiana si possono ricavare le coordinate del centro:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right).$$

Superficie

L'area della superficie di una sfera di raggio R è data dall'equazione:

$$A = 4\pi R^2.$$

Dimostrazione analitica in coordinate cartesiane

La sfera può essere pensata come un solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse x il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

che rappresenta una semicirconferenza di raggio R. Pertanto, per il primo teorema di Guldino, la superficie laterale è data da:

$$A = 2\pi \int_{-R}^{+R} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{+R} R\, dx = 2\pi R(R + R) = 4\pi R^2.$$

Dimostrazione analitica in coordinate polari

La superficie totale della sfera si può ottenere, per il primo teorema di Guldino, tramite il seguente integrale:

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi R^2 (-\cos\pi + \cos 0) = 4\pi R^2.$$

Volume

Il volume della sfera di raggio R è dato dall'equazione (integrale in dR della superficie):

$$V = \frac{AR}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

La dimostrazione di questa formula può essere ottenuta in modo immediato usando il metodo degli indivisibili oppure con gli strumenti nell'analisi matematica.

Dimostrazione analitica

Si pensi di sommare tutte le aree dei cerchi che si ottengono sezionando la sfera con dei piani orizzontali. Il raggio di questi cerchi varierà con una funzione $f(l)$ della distanza del piano orizzontale dal centro della sfera e dato che l'area di un cerchio equivale a π per il raggio al quadrato:

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi f^2(l)\, dl,$$

dove l appunto è la distanza del piano dal centro della sfera.

Raggio alla distanza x

$$s = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Dunque, dal teorema di Pitagora, $f(l)$ vale:

$$f(l) = \sqrt{R^2 - l^2}$$

che, sostituita nell'equazione del volume, si trova:

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - l^2)\, dl = \pi \int_{-R}^{+R} R^2\, dl - \pi \int_{-R}^{+R} l^2\, dl = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Allo stesso modo si può calcolare il volume V_{KS} di un segmento di sfera di altezza h

$$V_{\mathrm{KS}} = \int_{r-h}^{r} A_x dx = r^2\pi[x]_{r-h}^{r} - \frac{1}{3}\pi\left[x^3\right]_{r-h}^{r}$$
$$V_{\mathrm{KS}} = r^2\pi\left[r - (r-h)\right] - \frac{1}{3}\pi\left[r^3 - (r-h)^3\right] = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi\left[r^3 - (r^3 - 3r^2h + 3rh^2 - h^3)\right]$$
$$V_{\mathrm{KS}} = \pi r^2 h - \pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3 = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Dimostrazione tramite infinitesimi

La sfera può anche essere intesa come l'insieme di numerose piramidi infinitesime, tutte con il vertice nel centro della sfera e con i poligoni di base delle piramidi che poggiano sulla superficie della sfera: queste infinite piramidi elementari riempiranno tutto e solo il volume della sfera. Il volume di ogni piramide è:

$$\frac{\text{area di base} \cdot \text{altezza}}{3}$$

mentre il volume complessivo è pari a

$$\frac{\text{area della sfera} \cdot \text{raggio della sfera}}{3}$$

dal quale si desume il significato della formula per il volume della sfera.

Altre proprietà

La sfera è la figura tridimensionale con il minimo rapporto superficie/volume: ciò spiega perché a tale forma tendono molti oggetti fisici, dalle gocce di liquido ai corpi celesti. Ad esempio, le bolle sono sferiche perché la tensione superficiale tende a minimizzare l'area a parità di volume.

Il cilindro circoscritto ha un volume che è $3/2$ quello della sfera, ed una superficie laterale che è la stessa di quella della sfera. Questo fatto, e le formule scritte sopra, erano già noti ad Archimede.

Con l'aumentare del raggio, il volume della sfera cresce più della superficie. Infatti il rapporto fra queste due quantità è $R/3$.

Una sfera può anche essere definita come formata da un semicerchio che ruota intorno al suo diametro. Se si usa una ellisse, si ottiene un ellissoide di rotazione.

Terminologia

Due punti della superficie sferica che stanno sulla stessa retta passante per l'origine sono detti antipodali, e una tale retta è detta *asse*, poiché è un asse di simmetria della sfera.

Un cerchio massimo è una circonferenza avente lo stesso centro della sfera, ottenuta quindi intersecando la superficie sferica con un piano passante per l'origine.

Se un punto della superficie sferica è identificato come polo nord, il suo antipodale è il polo sud e l'equatore è il cerchio massimo equidistante dai due poli. I cerchi massimi passanti per i poli sono i meridiani, mentre la linea retta passante per l'origine ed i due poli è l'*asse*. Questa terminologia è usata anche per i corpi celesti come la Terra, anche se non perfettamente sferici.

Generalizzazioni ad altre dimensioni

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Ipersfera***.

La sfera può essere generalizzata in altre dimensioni. Per ogni numero naturale n, una **sfera n-dimensionale** è l'insieme dei punti nello spazio euclideo $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{R}^{n+1}$ che hanno una distanza fissata $r > 0$ da un certo punto dello spazio.

Ad esempio:

- una sfera 0-dimensionale è fatta di una coppia di punti $\{-r, r\}$ in $\mathbb{R}$;
- una sfera 1-dimensionale è una circonferenza di raggio r nel piano;
- una sfera 2-dimensionale è la superficie sferica ordinaria;
- una sfera 3-dimensionale è una sfera nello spazio euclideo 4-dimensionale (intesa come un'ipersuperficie 3-dimensionale ipersferica).

Le sfere di dimensione > 2 sono chiamate anche ipersfere. La sfera n-dimensionale di raggio unitario, centrata nell'origine, viene indicata con S^n.

Generalizzazioni in spazi metrici

Più in generale, in uno spazio metrico (E, d), la sfera di centro x e raggio $r > 0$ è l'insieme

$$S(x; r) = \{y \in E | d(x, y) = r\}.$$

Una sfera in uno spazio metrico può essere un oggetto molto diverso dalla sfera usuale. Ad esempio, può essere vuota: se consideriamo $\mathbb{Z}^n$ con la metrica euclidea, una sfera di raggio r è vuota se e solo se r^2 non può essere scritto come somma di n quadrati.

Formule

Formule della Sfera	
Circonferenza	$U = 2\pi r = \frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{PF}}}{\mathrm{d}r}$
Superficie	$A_O = 4\pi r^2 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$
Volume	$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \int_0^r A_O \mathrm{d}r$
Area di un cerchio massimo	$A_{\mathrm{PF}} = \pi r^2 = \int_0^r U \mathrm{d}r$
Volume di un segmento di sfera	$V_{\mathrm{KS}} = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h)$
Area di una calotta sferica	$A_{\mathrm{KK}} = 2rh\pi = 2r^2\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$
Momento d'inerzia	$J = \frac{2}{5}mr^2$

Dove con r si intende il raggio della sfera, con h l'altezza del segmento di sfera o della calotta sferica, con α l'ampiezza in steradianti della calotta.

Ingegneria

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Chilogrammo § Proposte per la definizione futura***.

Per quanto si sia avvicinato, l'uomo non è ancora riuscito a produrre alcun oggetto dalla sfericità matematicamente perfetta. Finora il miglior risultato è stato raggiunto dall'*Australian Centre for Precision Optics*, di Lindfield (Australia). La sfera è stata ottenuta attraverso una levigazione ad altissima precisione di una barra di silicio 28 (un isotopo del silicio) ed è frutto del Progetto Avogadro, che si propone di arrivare alla definizione del chilogrammo perfetto, basata sulla conoscenza dell'esatto numero di atomi che

compongono tale sfera.[1] Il suo diametro è di 9,36 centimetri e come uniche imperfezioni presenta una rugosità di 0,3 nanometri e piccole deviazioni di sfericità di circa 60-70 nanometri. In precedenza, il miglior risultato era stato ottenuto dalla NASA, che per la sonda Gravity Probe B, costruita per degli studi gravitazionali in orbita, ha creato dei giroscopi con deviazioni inferiori ai 100 nanometri.

Sfera campione del progetto Avogadro

Filosofia

Parmenide paragona l'Essere a una sfera perfetta, sempre uguale a se stessa nello spazio e nel tempo, chiusa e finita (per gli antichi greci il finito era sinonimo di perfezione). La sfera è infatti l'unico solido geometrico che non ha differenze al suo interno, ed è uguale dovunque la si guardi; l'ipotesi collima suggestivamente con la teoria della relatività di Albert Einstein che nel 1900 dirà:[2] «Se prendessimo un binocolo e lo puntassimo nello spazio, vedremmo una linea curva chiusa all'infinito» in tutte le direzioni dello spazio, ovvero, complessivamente, una sfera (per lo scienziato infatti l'universo è finito sebbene illimitato, fatto di uno spazio tondo ripiegato su se stesso).[3]

Note

1. ^ Alla ricerca del chilo perfetto (http://www.corriere.it/scienze_e_tecnologie/08_luglio_01/chilo_perfetto_a1b71036-4762-11dd-8c36-00144f02aabc.shtml)
2. ^ Albert Einstein si espresse tra l'altro in maniera sorprendentemente simile a Parmenide, in quanto anch'egli tendeva a negare la discontinuità del divenire e il suo svolgimento nel tempo. Secondo Popper, «grandi scienziati come Boltzmann, Minkowski, Weyl, Schrödinger, Gödel e, soprattutto, Einstein hanno concepito le cose in modo similare a Parmenide e si sono espressi in termini singolarmente simili» (tratto da Karl Popper, *The World of Parmenides*, Routledge, 1998, ISBN 9780415237307., trad. it., 1998).
3. ^ «La materia, secondo Einstein, si curverebbe su se stessa, per cui l'universo sarebbe illimitato ma finito, simile ad una sfera, che è illimitatamente percorribile anche se finita. Inoltre Einstein ritiene che non abbia senso chiedersi che cosa esista fuori dell'universo» (Ernesto Riva, *Manuale di filosofia*, pag. 132, 2007, ISBN 978-1-4092-0059-8).

Voci correlate

- Circonferenza
- Geometria sferica
- Trigonometria sferica
- Pentagramma miracoloso
- Ipersfera
- Pseudosfera
- Palla (matematica)
- Sfera unitaria

Altri progetti

- Wikiquote contiene citazioni di o su **sfera**
- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**sfera**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **sfera (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Spheres?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Sfera*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Sfera*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38152 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38152) · LCCN (EN) sh85126590 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85126590) · GND (DE) 4165914-4 (https://d-nb.info/gnd/4165914-4) · BNF (FR) cb119812876 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb119812876) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb119812876) · J9U (EN, HE) 987007565817805171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007565817805171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Sfera&oldid=133117911"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 21 apr 2023 alle 19:01.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.